த பா, நி (க்'லெ) வரிசை எண—671

நிகழ்தகவுக் கொள்கையும் புள்ளியியலும்

(பொறியியலில இவற்றின பயனகளுடன)

ஆசிரியா

கு வெங்கடேசன, எம

பேராசிரியா, கணிததது

குருநானக கலலூரி,

சென்னை



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—January, 1970

TNTBS (CP) No 671

Probability Theory and Statistics with Engineering Applications

VENKATESAN

Price Rs. 6-10

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi

Printed out of the Paper allotted by the Government of India

Printed by
BHAGAT PRINTERS,
407 M K N Road,
Alandur, Madras-600 016

அணிந்துரை

திரு இரா நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந்தாண்டுகள் ஆகிவிட்டன குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவருகின்றனர் 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம் தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித்தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாச இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும், சென்னைப் பல்கலைக் கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வாணியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூல நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது

இவற்றுள் ஒன்றுான நிகழ்தகவுக் கொள்கையும் புள்ளியியலும் (பொறியியலில் இவற்றின் பயன்களுடன்) என்ற இந்நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 671ஆவது வெளியீடாகும் கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 706 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன இந்நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும் கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக் கழகங்களிலும், கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளர வேண்டும் என்பதுதான் 'எதிலும் தமிழ், எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும் தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

பக்கம்

1. விவரங்கள்-சேகரித்தலும் படைத்தலும்

§ 1.1. அறிமுகம்

புள்ளியியல் என்பது புள்ளி விவரங்களைப் பற்றிய இயலாகும். வளர்ந்தோங்கிய இன்றைய விஞ்ஞான உலகில் மனிதன் ஈடுபட்டுள்ள எல்லாத் துறைகளிலும் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு ஆராயப்படுகின்றன. மருத்துவ விடுதிகள், ஆராய்ச்சிக் கழகங்கள், கல்விச் சாலைகள், திட்டக் குழுக்கள், அரசுத் துறைகள் முதலிய பல்வேறு நிறுவனங்களுக்குப் புள்ளியியல் உற்ற துணையாக நிற்கின்றது என்பதை நாம் அறிவோம். சமுதாய, பொருளாதார வளர்ச்சித் திட்டங்கள் புள்ளியியல் அடிப்படையில்தான் நிகழுகின்றன. பொர்நௌலி, காஸ், கார்ல் பியர்ஸன், லாப்லாஸ் போன்ற கணித மேதைகளின் தொண்டு புள்ளியியலை உயர்நிலைக்கு வளர்த்துள்ளது.

புள்ளியியல் என்றால் என்ன ? புள்ளியியலை எண்ணிக்கையின் அறிவியல் என்றும், சராசரிகளின் அறிவியல் என்றும் பௌலி என்னும் ஆசிரியர் குறிப்பிடுகின்றார். டபுள்யூ கிங் கூறுகின்றார்: 'வெவ்வேறு தோராய மதிப்புகளை ஆராய்ந்தபின் அவற்றினின்று பெறப்படும் முடிவுகளை வேறு இடங்களுக்குப் பொருத்திப் பார்த்தலே புள்ளியியல்.' 'அநேகக் காரணங்களால் பாதிக்கப்படும் அளவைகளை ஆராய்வதுதான் புள்ளியியல்' என்கிறார் யூல். 1943ஆம் ஆண்டு வெளியிட்ட அறிக்கையில் புள்ளியியல் என்பது, 'புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல், படைத்தல், நிகழ்தகவுக் கொள்கைப்படி பகுத்துணர்தல், விளக்கம் காணுதல்' என ராயல் புள்ளியியல் கழகம் கூறுகின்றது. இவ்வாறு பல்வேறு முறைகளில் புள்ளியியலை வரையறுப்பினும் புள்ளியியல் இவற்றிற்கெல்லாம் அப்பாற்பட்டதாக இருக்கின்றது. ஏனென்றால்

இன்று வரை கண்டுபிடிக்கப்பட்ட புள்ளியியல் முறைகள் இவற்றிற்குள் அடங்காதவை.

புள்ளியியலின் நோக்கம்: நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் எத்தனையோ நிகழ்ச்சிகளைக் கண்டு நம் எண்ணத்தை வெளியிடுகின்றோம் அல்லவா? உதாரணமாக, 'அவன் ஒரு பலசாலி', 'கந்தன் உயரமானவன்', 'சீதா ஓர் அழகான பெண்' என்றெல்லாம் கூறுகின்றோம். ஆனால், ஒருவருக்கு அழகாகத் தெரியும் ஒரு பொருள் மற்றொருவருக்கு அழகெனத் தெரியாமல் இருக்கலாம். அழகு, உயரம், பலம் போன்றவற்றில் விஞ்ஞான ரீதியாக ஒருதலைப்பட்சமற்ற தீர்ப்பு தேவைப்படுகின்றது. இவ்வகையில் சரியான தீர்ப்பு காண முற்படுவதே புள்ளியியலின் நோக்கமாகும். புள்ளியியல் நிபுணன் பலவகை உண்மைகளைத் தொகுத்து, சுருக்கி, மக்கள் மத்தியில் தனது தீர்ப்பைத் தருகின்றான். இதனால் பிரச்சினை எவ்வளவு சிக்கலானதாக இருப்பினும் சரியானதொரு தீர்வினை மக்களுக்குத் தருகின்றான். ஒரு வகையான விவரங்களை மட்டும் படைத்தல் போதாது. புள்ளியியல் நிபுணன் கூடவே மற்ற வகையான விவரங்களையும் கொடுத்து ஒப்பு நோக்கத்தக்க வகையில் படைக்கின்றான். உதாரணமாக ஒரு நாட்டின் காலாட்படை பலம், விமானப்படை பலம் போன்றவைகளைக் கொடுக்குங்கால் மற்ற நாடுகளின் காலாட்படை பலம் விமானப்படை பலம் போன்றவைகளையும் கொடுத்து ஒப்பு நோக்குதல் சிறப்பாகும்.

இறந்த காலத்தையும் நிகழ் காலத்தையும் அலசி ஆராய்ந்து எதிர்காலத்தைக் கணிப்பது புள்ளியியலின் மற்றொரு நோக்கமாகும். தனித்தனியான நிகழ்ச்சிகளைப் பெரிதாக்கிக் காட்டுவது தான் புள்ளியியலின் நோக்கம் என்கிறார் பௌலி.

புள்ளியியலின் ஒழுங்கு விதி: சமவாய்ப்புக் கூறின் இயல்பினைக்கொண்டு அத்தகு கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதி இயல்பினை அறிய முடியும் என்பது நமக்கு ஆச்சரியத்தைத் தருகிறது அல்லவா? வாழ்க்கையில் நாம் பார்க்கின்ற எல்லாப் பொருள்களும் ஓர் ஒழுங்கு விதிக்குக் கட்டுப்படுகின்றன. ஓர் அறுமுகப் பகடையை ஆயிரம் தடவைகள் சுழற்றி விட்டால் ஒவ்வொரு முகமும் ஏறத்தாழச் சம தடவைகளில் பிறழ்வதைக் காணலாம். ஒரு நிலத்திலுள்ள கரும்புப் பயிரில் சமவாய்ப்புக் கூறாக அமைந்த 100 கரும்புகளின் கூட்டுச் சராசரி எடையே அந்த நில முழுமைக்குமுள்ள கரும்புகளின் கூட்டுச் சராசரி எண்ணிக்கையாக அமைவதைக் காணலாம். ஒரு வகுப்

பினைச் சார்ந்த 500 மாணவர்களில் சமவாய்ப்புக் கூருக அமைந்த 50 மாணவர்களின் சராசரித் தரம், உயரம், பருமன் முதலியன அத்துணை மாணவர்களின் சராசரி அளவைகளாக அமைவதைக் காணலாம். முழுமைத் தொகுதியின் எல்லாப் பண்புகளையும் சமவாய்ப்புக் கூறு ஒன்றிலிருந்து அறியலாம் என்பது தெளிவு. இதைப் போன்றே ஒழுங்கு விதி இயங்கும் எண்ணற்ற மாதிரிகளை நாம் எளிதிற் கூறலாம்.

அடுத்தது பெரிய எண்களின் நிலைத்தன்மை விதி (Law of Inertia of Large Numbers). மழையின்மையாலோ அல்லது அதிக மழையினுலோ நாட்டின் ஒரு பகுதியில் உற்பத்தி குறையக்கூடும், அதே சமயம் வேருெரு பகுதியில் நல்ல விளைச்சல் ஏற்படலாம். மொத்தத்தில் நிகர உற்பத்தியில் எவ்வித மாறுதலுமின்றிச் சாதாரணச் சூழ்நிலை இருத்தல் காணலாம். ஒரு நகரில் சிலர் திடீரென ஏழைகளாகவும், வேறுசிலர் திடீரெனப் பணக்காரர்களாகவும் ஆகிவிடுகின்றனர். எனினும், அந் நகரின் மொத்தச் சொத்து மதிப்பீடு மாருமல் இருத்தல் காணலாம். ஓர் ஆண்டில் ஓர் இராச்சியத்தின் சில பகுதிகளில் பலர் இறந்து விடக்கூடும்; வேறு பகுதியில் அதிகக் குழந்தைகள் பிறக்கலாம். அந்த ஆண்டில் அந்த இராச்சிய மக்கள் தொகை குறிப்பிடத்தக்க அளவிற்கு மாருமல் இருப்பதைக் காணலாம் (அதாவது மாற்றங்கள் ஒன்றையொன்று சரிசெய்து கொள்ளுகின்றன என அறியலாம்). இந்த விதியைக் கடைப்பிடித்துத்தான் ஆயுள் இன்ஷ்யூரன்ஸ் கம்பெனிகள் இயங்குகின்றன.

§ 1.2. புள்ளியியலின் பயன்கள்

புள்ளியியல் பயன்படாத துறையே எதுவுமில்லை என உறுதியாகக் கூறலாம். மனித அறிவு எட்டும் எல்லாத் திசைகளிலும் இது பயன்படுகின்றது. வாணிகம், விவசாயம், மருத்துவம், உளவியல், வேதியியல், புவியியல், வானவியல், விலங்கியல், உயிரியல் போன்ற பல்வேறு அறிவியல்களில் புள்ளியியல் பெரும்பங்கு வகிக்கின்றது. ஐந்தாண்டுத் திட்டங்கள் யாவும் புள்ளியியலின் அடிப்படையில் அமைந்தவையே. பொருளாதார மாணவர்கட்குப் புள்ளியியல் பாடம் இன்றியமையாததாகும். கணக்கியலும், புள்ளியியலும் இணைந்த பொருளாதாரத் துறையொன்று புதிதாக நிறுவப்பெற்றுள்ளது. உயர்ந்த பொருளாதாரக் கொள்கைகள் யாவும் புள்ளியியல் அடிப்படையில் எழுந்துள்ளன. தொழிற்சாலைகளிலும், வாணிகத்திலும் புள்ளியியலின் பங்கு மிக அதிகம்.

§ 1.3. புள்ளியியலின் வரைமுறை

புள்ளியியலைப் பயன்படுத்துவதற்கு ஒரு வரைமுறையுண்டு. ஒரு சூழ்நிலைக்குக் கண்ட புள்ளி விவரத்தினைப் பிறிதொரு சூழ்நிலைக்குப் பயன்படுத்துதல் கூடாது. எண் வடிவத்தில் கூறப்படாத நிலைகளில் புள்ளியியலின் வழிமுறைகளை உபயோகித்தல் கூடாது. விவரங்களைச் சேகரித்தல், அவற்றைப் பாகுபடுத்தி விளக்கம் காணுதல், கூறு காணுதல், பண்பளவைகள் ஏற்றதாகக் கணித்தல், ஒப்பிட்டு நோக்கி ஒப்புறவு காணுதல், முடிவு காணுதல், எதிர் காலத்திற்கு மதிப்பீடு காணுதல் ஆகிய யாவும் புள்ளியியல் அறிந்த வல்லுநர்களால் செய்யப்படவேண்டியன. அதுவும் ஒவ்வொரு நிலையிலும் மிகுந்த கவனத்துடன் முறை பிறழாது புள்ளியியலைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

புள்ளியியலைத் தவருகப் பயன்படுத்த நிறைய வாய்ப்புகளுண்டு. மிகச் சில நிகழ்ச்சிகளை மனத்திற்கொண்டு மக்கள் உடனே ஒரு முடிவிற்கு வந்துவிடுகின்றனர். அது பெருந்தவருகும். ஒரு சூழ்நிலையில் கண்ட புள்ளி விவரத்தினைப் பிறிதொரு சூழ்நிலையில் அரசியல்வாதிகளும் விளம்பரதாரர்களும் தம் சொந்த நலனுக்காகப் பயன்படுத்துவர். இத்தகையானவர்களால்தான் புள்ளியியலைச் சாதாரண மக்கள் நம்புவதற்குத் தயங்குகின்றனர். புள்ளியியலைப் 'பொய்யின் இருப்பிடம்' என்பாரும் உண்டு. புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு எதனையும் எப்படியும் நிறுவலாம் என்பாரும் உண்டு. இது தவருகும். புள்ளியியலைச் செவ்வனே பயின்ருரல்லாத மற்றவர் கையில் புள்ளியியல் ஓர் ஆபத்தான கருவியாகும்.

கணக்கியல் முறைப்படி மிகுந்த கவனத்துடன் புள்ளியியலைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இல்லையெனில் 'இமாலயத் தவறுகள்' ஏற்பட ஏதுவாகி விடும். புள்ளியியல் நாட்டை வளமுள்ளதாக்கும் ஒரு சாதனம் என்பதில் எள்ளளவும் ஐயமில்லை.

§ 1.4. புள்ளி விவரங்கள்—சேகரித்தல்

புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கு முன் எந்த நோக்கத்திற்காகப் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பதைத் தெள்ளத் தெளிவாகத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில், நோக்கத்தில் ஏற்படுகின்ற சிறிய மாற்றம்கூடப் புள்ளி விவரத்தினைச் சேகரிக்கும் முறையையே மாற்றிவிடும். உதாரணமாக, ஒரு நகரில் பண்டங்களின் மொத்த விற்பனை விலைகளைச் சேகரித்தோமானுல் அவை மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் (Index Number) காண உதவும். இப் புள்ளி விவரங்கள் வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டு எண்ணிற்குச் சில்லறை விற்பனைக் கட்ட நிலையில்

உள்ள பண்ட விலைகள் தாம் வேண்டும். எனவே, நோக்கத்தில் தெளிவு வேண்டும்.

அடுத்து 'ஒரு கூறு அளவெடுப்பு' மிக்க பயன் தரும். அது நமக்குத் தேவையான புள்ளி விவரங்களுக்கான காலம், பணம் கருவிகள், முறைகள் முதலியவற்றைத் திட்டவட்டமாகக் கணிக்க உதவும். ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் முன்னெச்சரிக்கையாக இருத்தல் அவசியம். சிறிதளவு முன்னெச்சரிக்கை பின்னால் வரும் பெரிய குழப்பங்களைத் தவிர்க்க வல்லது.

நோக்கத்தில் தெளிவு ஏற்பட்டபின் புள்ளி விவரங்களை எவ்விதத்தில் சேகரிப்பது என்ற வினா எழுகின்றது. புள்ளி விவரங்களை முதல் தரப் புள்ளி விவரங்கள், இரண்டாம் தரப் புள்ளி விவரங்கள் என இரு வகையாகவும், அவற்றைச் சேகரிக்கும் முறைகளை முதல் தரச் சேகரிப்பு முறை, இரண்டாம் தரச் சேகரிப்பு முறை என இரு வகையாகவும் பிரிக்கலாம்.

ஆய்வாளர் நேரடியாகவோ அல்லது சேகரிப்பாளர்களை நியமித்து வினாப்பட்டியல் மூலமாகவோ சேகரிக்கப்படும் புள்ளி விவரங்களை முதல் தரப் புள்ளி விவரங்கள் என்றும், முதல் தரச் சேகரிப்பு முறை என்றும் கூறுவர். இதில் பணமும் காலமும் சற்றுக் கூடுதலாகச் செலவாகும்.

ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்டு முழு நிலையிலோ அல்லது முழு நிலையின் ஒரு பகுதியாகவோ அமைந்த புள்ளி விவரத்தினைக் கையாளும் முறை இரண்டாம் தரச் சேகரிப்பு முறை எனப்படும். இவ்வகைப் புள்ளி விவரங்கள் இரண்டாம் தரப் புள்ளி விவரங்கள் எனப்படும். அங்ஙனம் கையாளப்படும் விவரங்கள் சரியான புள்ளி யியல் முறைப்படி சேகரிக்கப்பட்டவைதாமா, நம்பத்தகுந்தவை தாமா எனத் தெளிவுபடுத்திக்கொள்ள வேண்டும்.

இனத் தொகுதி : 1972ஆம் ஆண்டு சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தில் புகுமுக மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள், ஒரு பகடையைச் சுழற்றும்போது பிறழும் முகங்கள், ஏதோ ஒரு நாளில் காலை மணி 6 முதல் மாலை மணி 6 வரை சென்னை நகரில் ஏற்படும் வெப்ப மாற்றம் போன்றவை இனத் தொகுதிகள் எனப் படும். இனத் தொகுதியை வரம் புடை இனத் தொகுதி என்றும், எண்ணற்ற இனத் தொகுதியென்றும் கூறுபடுத்த லாம். முதலாவதாகக் கூறப்பட்ட உதாரணம் வரம்புடை இனத் தொகுதி. மூன்றாவதாகக் கூறப்பட்ட உதாரணம் எண்ணற்ற இனத்தொகுதியாகும். இனத் தொகுதிகள், தொடர் இனத் தொகுதியாகவோ அல்லது தனித்த உறுப்புகள்

கொண்ட இனத் தொகுதி (discrete population) யாகவோ இருக்கலாம். உதாரணம் மூன்று ஒரு தொடர் இனத்தொகுதி யாகும். மற்ற இரண்டும் தனித்த உறுப்புகள் கொண்ட இனத் தொகுதியாகும். இனத் தொகுதியை முழுமையாகக் கணிப்பது முழுமைக் கணிப்பு (census) எனப்படும். அவ்விதமாகச் சேகரிக்கும் வாய்ப்போ நேரமோ இல்லையெனில் பாரபட்சமற்ற கூறு அளவெடுப்பு மூலம் இனத் தொகுதியை ஆராயலாம். எடுத்துக் காட்டாக நாம் இந்திய மக்கட் தொகைய்யை முழுமையான கணிப்பாக அரசாங்கம் செய்வதைக் காண்கிறோம். ஒரு நிலத்தில் பயிராகும் பயிரின் விளைச்சலை மதிப்பெடுக்க ஒரு கூறு அளவெடுத்து ஆராயலாம். இந்த் இரு முறைகளும் கையாளப்படுவதை நாம் காண்கிறோம்.

§ 1.5. முதல் தரச் சேகரிப்பு முறை

முதல் தரச் சேகரிப்பு முறையில் மூன்று முறைகளில் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கலாம். அவையாவன: (i) ஆய்வாளர் நேரடி யாகச் சேகரிக்கும் முறை, (ii) தபால் மூலம் சேகரிக்கும் முறை, (iii) சேகரிப்பாளர்களை நியமித்து விளுப்பட்டியல் மூலம் சேகரிக்கும் முறை. ஆய்வாளர் நேரடியாகச் சேகரிக்கும் முறையில் பல நன்மைகள் உள்ளன; அதே நேரத்தில் தீமைகளும் உள்ளன. இவ்விதம் சேகரிக்கப்படும் விவரங்கள் முதல் தரமாகவும் முழுமை யாகவும் கிடைப்பதனுல் பின்னுல் வேண்டிய புள்ளி விவர ஆய் விற்குப் பெரிதும் உதவுகின்றன. ஆனுல் மிகப் பெரிய ஆய்வாகவும், புள்ளி தருமிடங்கள் பரந்தும் அமையுமெனில் தனி நபர் ஒருவரே சேகரிக்காது பல சேகரிப்பாளர்களை நியமித்து விவரங்களை அறிய லாம். மக்கள் தொகைக் கணிப்பு இம்முறையில்தான் செயல் படுத்தப்படுகின்றது. சேகரிப்பாளர்கள் உண்மையாக உழைத்துச் சரியான விவரங்களைத் தருவார்களேயானுல் சிறந்த ஆய்விற்கு அவை பெரிதும் பயன்படும். தபால் முறையில் சேகரிப்பதும் ஒரு வகையில் சிறந்ததே. இதில் செலவு குறையும். புள்ளி தருமிடங்கள் பரந்து அமைந்திருப்பினும் கவலையில்லை. விளுக்கள் அனைத்தும் விடையளிக்கப்பட்டுத் திரும்ப அனுப்பப்படும் என்று சொல்ல இயலாது: விளுக்களுக்குரிய விடைகளைக் கட்டாயமாகப் பெறப் படும் வசதியிருப்பின் இம்முறை சிறந்ததாகும். அரசாங்கத்தின் பல்வேறு துறைகள் தபால் மூலம்தான் விவரங்களைச் சேகரிக் கின்றன.

§ 1.6. இரண்டாம் தரச் சேகரிப்பு முறை

இவ்வகையில் சேகரிக்கும்போது மிக்வும் எச்சரிக்கையாக இருத்தல் அவசியம். ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள்

நம்பத் தகுந்தவை என்பதை முதலில் தெளிவுபடுத்திக் கொள்ள வேண்டும். புள்ளி விவரங்கள் சரியானவையே என்று ஐயமறத் தெரிந்த பின்னரே அவ் விவரங்களை நாம் கையாள வேண்டும். விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்ட இடம், காலம், முறை, உபயோகிக்கப் பட்ட அலகுகள், மதிப்புகளின் தரம் போன்றவற்றை மனத்திற் கொண்டு இரண்டாம் தரச் சேகரிப்பு முறையினைக் கையாளலாம்.

இவ்விரண்டு வழிகளிலும் மிகமிக முக்கியப் பங்காற்றுவது வினாப்பட்டியலாகும்.

§ 1.7. வினாப் பட்டியல்

வினாப் பட்டியல் தயாரிக்கும்போது கீழ்க்கண்டவற்றைக் கருத்திற் கொள்ள வேண்டும்: (i) ஆய்வின் நோக்கத்திற்கேற்ப வினாப்பட்டியல் சுருக்கமாகவும், வேண்டிய செய்திகள் அனைத்தும் பெறும் வண்ணமும் இருத்தல் வேண்டும்; (ii) வினாக்கள் தெளிவான வையாக அமைதல் வேண்டும்; (iii) ஆம், இல்லை என்பன போன்ற சுருக்கமான பதில்களைப் பெறும் வண்ணம் வினாக்கள் அமைதல் வேண்டும் (எண் வடிவத்தில் தரப்படும் பதில்களைப் பெறும் வண்ணமும் அமையலாம்); (iv) பதில் தருவோரின் தனிப்பட்ட கருத்துகளையோ உள்ளத்தையோ மத நெறி முறைகளையோ புண்படுத்தும் வண்ணம் அமைதல் கூடாது; (v) இங்கிதமின்றிக் கேள்விகள் அமைதல் கூடாது. சில தருணங்களில் சில கேள்வி களுக்கு நேரடியான பதில்கள் பெறுவது கடினம். சில தாய்மார்கள் தங்களுடைய வயதைச் சொல்ல மாட்டார்கள். அத் தருணங் களில் வேறு ஏற்றதொரு முறையில் கேள்விகளை அமைத்தல் வேண்டும்; (vi) பெறப்படும் விடைகள் பாகுபாட்டிற்கும் பட்டியல் அமைப்பிற்கும் உட்படும் தன்மையனவாக அமைதல் வேண்டும்; (vii) சேகரிப்பாளர்கள் உண்மையான ஆர்வமுள்ளவர்களாக இருத்தல் வேண்டும்.

குறிப்பு: சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களைக் கிட்டிய மதிப்பில் சில தருணங்களில் சொன்னால் போதுமானது. ஒரு மாவட்டத்தில் விளைந்த நெல்லின் அளவினை நெருங்கிய நூறு டன்களில் கூறினால் போதுமானதாகும். இரு நாடுகளின் மக்கட் தொகையை ஒப்பிடுங் கால் அவற்றை மில்லியனில் கூறுவது போதுமானதாகும். இவ் வாறு புள்ளிகளின் தன்மைக்கேற்ப மதிப்புகளின் தரம் (degree of accuracy) மாறுபடுகின்றது. உண்மை மதிப்பிற்கும் கிட்டிய மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடு மிகக் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

§ 1.8. மாறிகள்

எண்ணிக்கையிலோ அல்லது தன்மையிலோ மாறும் குணமுடையவற்றிற்கு மாறிகள் என்பது பெயர். உயரம், எடை, வயது குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை இவை யாவும் மாறிகளே. அவை இரு வகைப்படும். அவை தொடர் மாறி, தனித்த மாறி என்பனவாகும். உயரம், எடை போன்றவை தொடர் மாறிகளாகும். குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை தனித்த மாறியாகும். ஒரு சேகரிப்பில் கிடைக்கும் விவரங்களுக்குச் சீர்படா விவரங்கள் என்பது பெயர். இச் சீர்படா விவரங்களை அவற்றின் தன்மைக்கேற்ப ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ அடுக்கலாம். இதை வரிசை (array) என்பர்.

§ 1.9. விவரங்களைப் படைத்தல்

சீர்படா விவரங்கள் எண் குவியலாகத்தான் தோன்றுமேயன்றி அவற்றிலிருந்து எந்தவித முடிபும் தீர்வும் காண இயலாது. உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்களின் உயரங்களையும் எடுப்பதாகக் கொள்வோம். சீர்படா விவரங்களிலிருந்து எவ்வித முடிவும் தெளிவாகத் தெரியாதாகையால் அவற்றை வரிசைப்படுத்தி அமைத்தல் வேண்டும். அவற்றைச் சுருக்கி ஒரு பட்டியல் மூலம் கொடுத்தல் நலம். குறைந்தபட்ச உயரம் 4′8″ ஆகவும், அதிகபட்ச உயரம் 6′2″ ஆகவுமிருப்பின் நாம் கீழ்க்கண்ட பட்டியலைச் சுலபமாகத் தரலாம் :

பிரிவுகள்	அலைவு எண்
4′8″ — 4′11″	2
4′11″— 5′2″	6
5′2″ — 5′5″	41
5′5″ — 5′8″	42
5′8″ — 5′11″	7
5′11″— 6′2″	2
மொத்தம்	100

இவ்வகைப் பட்டியல், ஆய்விற்கு உறுதுணையான வடிவத்தில் அமைவதோடு பார்ப்போர்க்குத் தெற்றெனப் புரியும்படியும் அமைந்திருக்கிறது; விவரங்களின் உண்மைத் தன்மையும் தெளிவா கின்றது; சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் அமைந்திருத்தல் காண்க. பல்வேறு வகையான பட்டியல்களைப் பார்த்துப் பழகிய பயிற்சி ஆய்விற்கு உறுதுணையாக நிற்கும். விவரங்களின் தன்மைக்கேற்பப் பட்டியல் முறையும் மாறும். அதனை ஈண்டுக் காண்போம்.

§ 1.10. வகுப்பாக்கம் (Classification)

பொதுவாக, சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை மூன்று வகையாக இனம் பிரிக்கலாம். காலத்தோடு இணைந்த எண்களைக் காலத் தொடர் (Time series) பட்டியலில் அமைக்கலாம். உதாரணமாக 1960-லிருந்து 1970 வரை ஒவ்வோர் ஆண்டும் இந்தியாவில் இறக்குமதியான இயந்திரங்கள், சென்னையில் 1972-ல் ஒவ்வொரு மாதமும் பெய்த மழையளவு போன்றவற்றை இவ்வகைப் பட்டியலில் அமைக்கலாம். அடுத்து இடப்பரவல் (Spatial distribution). இடம் சம்மந்தமானவற்றை இவ்வகையில் அமைக்கலாம். பல்வேறு மாநிலங்களிலுள்ள காட்டிலாகாப் பகுதிகள், இந்தியாவிலுள்ள முக்கிய நகரங்களில் பெய்த மழையளவு போன்றவற்றை இவ்வகையில் அமைத்துக் காட்டலாம். சமயம், பால் போன்ற தன்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட பாகுபடுத்தலைத் தன்மை அளவைப் பாகுபாடு என்போம். வயது, வருவாய் போன்ற எண் அளவையினை அடிப்படையாகக் கொண்ட பாகுபாட்டினை எண் அளவைப் பாகுபாடு எனக் கொள்ளலாம்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பட்டியல்களைக் காண்க.

பட்டியல் 1

ஒரு நகரின் ஒரு பகுதியில் இஞ்சினியரிங் டிப்ளமா (Dip. in Engineering) படித்தோர் விவரமும் தேறியவர்கள் விவரமும்:

	தேறியவர்கள்	தேறாதவர்கள்	மொத்தம்
தபால்வழி படித்தவர்கள்	70	53	123
நேரடிப் பயிற்சிவழி படித்தவர்கள்	285	92	377
மொத்தம்	355	145	500

பட்டியல் 2

தந்தையின் உயரமும், முதல் மகனுடைய உயரமும் (7 குடும்பங்களில்) :

தந்தையின் உயரம் (அங்குலங்களில்)	69	63	67	65	68	72	63
முதல் மகனுடைய உயரம் (அங்குலங்களில்)	67	65	66	64	67	70	64

பட்டியல் 3

100 மாணவர்களின் கணக்கு, விஞ்ஞானப் பாடங்களின் மதிப்பெண்கள் விவரம் :

கணிதப் பாடத்தில் மதிப்பெண்கள்

விஞ்ஞானப் பாடத்தில் மதிப்பெண்கள்	0—20	20—40	40—60	60—80	80—100	மொத்தம்
0—20						
20—40						
40—60						
60—80						
80—100						
மொத்தம்						

குறிப்பு : சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கேற்ப பட்டியல் அமைத்திடல் வேண்டும். எல்லா விவரங்களையும் ஒரே பட்டியலில் சுருக்கி அமைத்துக் காட்டுதல் நன்று. ஒப்பு நோக்குதற்கு இது சாலச் சிறந்ததாகும். இருப்பினும், விவரங்களை மிகச் சுருக்கி அமைத்திட்டால் சில சமயங்களில் சில முக்கியமான அளவுகள் அல்லது தன்மைகள் புலப்படாமற் போவதற்கு ஏதுவாகிவிடும். ஆகையால், பொது அறிவும் பயிற்சியும் அழகான பட்டியல் அமைக்கத் தேவை என்பது வெள்ளிடை மலை. பட்டியல் அமைக்கு முன்னர், பின்வரும் குறிப்புகளை நினைவிற் கொள்க:

(*i*) பட்டியலின் தன்மை, ஆய்விற்கு ஏற்றதாக இருத்தல் வேண்டும். (*ii*) பட்டியலில் படுக்கைக் கட்டங்களும் நெடுக்கைக் கட்டங்களும் அமைத்து ஒவ்வொரு படுக்கைக் கட்டங்களின் குழுவிற்கும், ஒவ்வொரு நெடுக்கைக் கட்டங்களின் குழுவிற்கும் ஏற்றதொரு தலைப்புக் கொடுத்திடல் வேண்டும். (*iii*) ஒப்புநோக்குதற்குத் தக்கவகையில் இத் தலைப்புகளைக் கொடுக்க வேண்டும்.

§ **1.11.** பிரிவின் தூரங்கள் (Class Interval)

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஏற்ற அளவுடைய பல்வேறு பிரிவுகளாக அமைப்போம். ஒரு பிரிவிற்கும் அதன் முந்தைய பிரிவிற்குமுள்ள வேறுபாடு அப் பிரிவுகளின் தூரமாகும். ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய மதிப்பும் (Mid-value) புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படும்.

பத்திலிருந்து இருபது வரை 'பிரிவின் தூரங்கள்' அமைத்தல் நலம். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களில் மிகக் குறைந்த மதிப்பிற்கும், மிக அதிகமான மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடு 'விவரங்களின் எல்லை வீச்சு' எனப்படும். இந்த விவரங்களின் எல்லை வீச்சினை 15 அல்லது 20ஆல் வகுத்தால் பிரிவுத் தூரத்தின் அளவு சுமாராகக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து பிரிவுத் தூரத்தின் அளவினைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

எப்பொழுதும் பிரிவுத் தூரத்தின் எல்லைகளை முழு எண்ணாக அல்லது பிரிவின் மைய மதிப்பு முழு எண்ணாக அமைத்திடல் நலம். விவரங்கள் யாவும் பிரிவுத் தூரத்தில் அமைந்து பிரிவின் எல்லைகளில் அமையாதிருப்பின் மிக நன்றாகும். எல்லாப் பிரிவுகளும் சம அளவாக அமைதல் ஆய்விற்கும் புள்ளியியல் முறைகளுக்கும் மிக அவசியமாகும். நடைமுறையில் கீழ்க்கண்டது போன்று ஐந்து வகையாகப் பிரிவுகளை இடத்திற்கு ஏற்ற முறையில் அமைத்தல் புள்ளியியல் மரபாகும்.

(*i*) 0— 4
5— 9
10—14
15—19 ...

(*ii*) 0— 5
5—10
10—15
15—20 ...

(iii) 0—10-க்குக் கீழே
10—20-க்குக் கீழே
20—30-க்குக் கீழே ...

(iv) 0—
10—
20— ...

(v) 5
10
15

மூன்ருவது, நான்காவது அமைப்புகளில் மேல் எல்லையை எந்தத் தசம இடச் சுத்தமாக எடுக்க வேண்டுமென்பதைச் சொல்வது நன்று. எத்தகைய பிரிவுகளிலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மேல், கீழ் ஆகிய இரண்டு எல்லைகளில் கூட்டுச் சராசரியே அப் பிரிவின் மைய மதிப்பாகும்.

§ 1.12. அலைவெண் பரவல் அமைத்தல் (Formation of Frequency Distrubution)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தினைப் பொறுத்து, எத்தனை பிரிவுகள் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும், பிரிவின் தூரம் எந்த அளவில் கொள்ளல் வேண்டும் எனத் தீர்மானித்துக்கொள்ள வேண்டும். முதலில் பிரிவு, அலைவெண் குறிகள், அலைவெண் என மூன்று பிரிவாகப் பட்டியலை அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்திலுள்ள மதிப்புகளை ஒவ்வொன்ருகப் படித்து அவை எந்தப் பிரிவில் அமைகின்றன எனத் தெளிந்து (அதற்கேற்றவாறு) இரண்டாவது பிரிவாகிய அலைவெண் குறிகள் என்ற பகுதியின்கீழ் ஒவ்வோர் எண்ணிற்கும் பதிலாக ஒரு நேர் கோடிட்டுக் குறியிட வேண்டும். நான்கு குறிகள் முடிந்ததும் ஐந்தாவது குறியினை, முன்பு போட்ட நான்கு குறிகளையும் சேர்த்துக் குறுக்காகப் போடுதல் எண்ணிக்கைக்கு உதவும் (||||). குறிகளின் எண்ணிக்கையை மூன்ருவது பகுதியாகிய அலைவெண்ணில் எழுதவேண்டும். இங்ஙனம் புள்ளி விவரங்களைப் பல்வேறு பிரிவுகளாக அமைத்து, ஒவ்வொரு பிரிவுடன் அது கொண்டுள்ள மொத்த எண்ணிக்கையினையும் சுட்டிக் காட்டும் பட்டியலே அலைவெண் பரவல் எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் கூட்டங்களை ஓர் அலைவுப் பரவலில் (அலைவெண் பரவலில்) எங்ஙனம் அமைப்பது என ஓர் எடுத்துக் காட்டு மூலம் காண்போம்.

கீழ்க்கண்ட 100 எண்கள் 1971ஆம் வருடச் சட்டசபைத் தேர்தலில் 100 இடங்களில் பதிவான வாக்குகளில் செல்லும் வாக்குகளின் சதவீதம் ஆகும். அலைவெண் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

57, 45, 55, 52, 65, 58, 51, 56, 48, 35, 34,
62, 36, 66, 20, 69, 57, 58, 69, 89, 69, 73,
84, 66, 47, 65, 58, 40, 50, 73, 72, 68, 44,
42, 53, 55, 59, 58, 35, 42, 48, 46, 68, 58,
27, 36, 44, 47, 35, 29, 69, 62, 62, 55, 57,
52, 39, 68, 48, 45, 44, 51, 46, 53, 67, 53,
60, 51, 60, 60, 61, 45, 51, 52, 54, 64, 87,
66, 67, 73, 56, 69, 62, 57, 66, 75, 62, 76,
70, 82, 72, 51, 73, 58, 72, 61, 49, 60, 60, 55.

இதில் மிக அதிக அம்சம் 89, மிகக் குறைந்த அம்சம் 20. எனவே, வீச்சு = 69. எனவே, 7 பிரிவுகளில் அமைத்துக் காட்டலாம்.

பிரிவுகள்	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
20—29	III	3
30—39	~~IIII~~ II	7
40—49	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	17
50—59	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	30
60—69	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	29
70—79	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
80—89	IIII	4
மொத்தம்		100

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஒரு கல்லூரியில் மொத்த மாணவர்கள் 1248 பேர். அவர்களில் $\frac{1}{3}$ பங்கினர் புகுமுக வகுப்பினைச் சார்ந்தவர்கள். அவர்களில் சரிபாதி கலைப் பகுதியினையும், எஞ்சியவர் அறிவியல் பகுதியினையும் சார்ந்தவர். பட்டப்படிப்பு மாணவர்களுள் 242 பேர் அறிவியல் பகுதியினையும், எஞ்சியவர் கலைப் பகுதியினையும் சார்ந்தவர்கள். கல்லூரியில் மொத்த மாணவியர் 125 பேர். அவர்களில் $\frac{1}{5}$ பேர் பட்டப்படிப்புக் கலைப் பகுதியினைச் சார்ந்தவர்கள். அறிவியல் பட்டப் படிப்புத்துறையில் அதைவிட 5 மாணவியர் அதிகம். 45 மாணவியர் புகுமுக வகுப்புக் கலைத் துறையினைச் சார்ந்தவர்கள். இதனை ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டுக.

	புகுமுக வகுப்பு		பட்டப் படிப்பு		மொத்தம்
	கலைத் துறை	அறிவியல் துறை	கலைத் துறை	அறிவியல் துறை	
மாணவர்	163	183	565	212	1123
மாணவியர்	45	25	25	30	125
மொத்தம்	208	208	590	242	1248

2. நூறு மாணவர்கள் புள்ளியியல் பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு :

73	81	58	53	85	80	62	63	56	65
84	69	81	78	67	65	84	62	65	72
61	84	58	64	91	73	86	70	63	81
87	51	43	70	80	72	77	91	58	72
43	59	76	85	75	65	75	73	75	54
47	49	43	95	40	75	74	72	73	70
59	76	64	83	92	57	73	85	71	80
78	57	55	57	65	73	70	50	58	76
62	33	22	87	42	36	69	96	61	37
72	29	63	81	7	33	12	8	65	41

ஏற்றதோர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

பிரிவுகள்	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
0—9	ǁ	2
10—19	|	1
20—29	ǁ	2
30—39	||||	4
40—49	𝍸 |||	8
50—59	𝍸 𝍸 𝍸	15
60—69	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19
70—79	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ǁ	27
80—89	𝍸 𝍸 𝍸 ǁ	17
90—99	𝍸	5
மொத்தம்		100

பயிற்சி

1. 10,000 பேர்களில் $\frac{1}{5}$ பேர் காச நோய் பீடிக்கப்பட்ட தன்மையிலிருந்தனர். அவர்களுள் 500 பேர்கள் இன்ஃபுளுயன்ஸா நோயாலும் பீடிக்கப்பட்டிருந்தனர். ஆனால், இவர்களுள் 100 பேர் மட்டும் நோய் பரவாத் தன்மையுடைய வீடுகளில் இருந்தனர். மாறாகக் காச நோய் பீடிக்கப்பட்டு இன்ஃபுளுயன்ஸாவிற்குத் தப்பித்தவர்களுள் $\frac{1}{15}$ பேர் பரவும் தன்மையுள்ள வீடுகளில் வாழ்ந்தனர். மொத்தத்தில் 2,100 பேர் இன்ஃபுளுயன்ஸாவால் பீடிக்கப்பட்டனர். 4,100 பேர் ஃபுளு பரவாத் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் வாழ்ந்தனர். ஆனால், காச நோய்க்குத் தப்பித்து ஃபுளுவால் பீடிக்கப்பட்டுப் பரவும் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் வசித்தவர் 200 பேர் மட்டுமே யாவர்.

இச் செய்தியினை ஒரு பட்டியல் வடிவத்தில் தருக.

2. கீழ்க்கண்ட பிரச்சினைகளை ஆய மேற்கொள்ளவிருக்கும் புள்ளியியல் ஆய்வுத் திட்டம், சேகரிப்பு முறை, வினாப்பட்டியல் முதலியவற்றை விளக்குக.

(i) உன்னுடைய நகர நடுத்தரக் குடும்பங்களின் வாழ்க்கைத் தரம்.

(ii) செங்கல்பட்டு மாவட்டத்தில் தொழு நோயால் தொல்லைப்படுபவர்.

(iii) சென்னையில் பிச்சைக்காரர்களால் ஏற்படும் தொல்லை.

(iv) வட ஆர்க்காடு மாவட்டத்தில் பீடித் தொழிலாளர்களின் பொருளாதாரப் பிரச்சினைகள்.

3. சென்னை நகரச் சாலைகளில் போக்குவரத்தின் தன்மைகளை ஆராய மேற்கொள்வதற்கான ஒரு புள்ளி விவர ஆய்வுத் திட்டத்தினை வினாப்பட்டியலோடு விளக்குக.

4. கீழ்க்கண்ட 90 எண்கள் ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் கணக்கியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும்:

83, 58, 55, 63, 53, 46, 91, 43, 76, 84, 54, 91, 33,
71, 76, 87, 44, 33, 73, 36, 73, 75, 43, 72, 57, 80,
65, 72, 35, 19, 53, 84, 27, 40, 82, 11, 18, 50, 46,
74, 37, 16, 38, 76, 58, 62, 71, 12, 23, 78, 39, 86,
61, 45, 35, 22, 19, 39, 47, 63, 29, 51, 66, 69, 50,
74, 65, 95, 77, 86, 73, 40, 27, 59, 67, 61, 19, 44,
37, 29, 47, 37, 80, 39, 27, 38, 41, 22, 13, 92.

இவைகளை உற்றதோர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

5. 35 தொழிலாளர்களின் ஒரு வாரச் சம்பளம் வருமாறு:

50, 30, 28, 41, 37, 34, 29, 44, 32, 25, 35, 40, 36,
35, 35, 41, 28, 27, 40, 29, 40, 36, 35, 35, 40, 24,
46, 44, 27, 31, 45, 28, 45, 37, 32.

இவைகளை ஏற்றதோர் அலைவுப் பரவலில் அமைக்க.

6. கீழ்க்கண்ட 100 எண்களும் 100 ஆட்களுடைய உயரமாகும் (அங்குலத்திற்குத் திருத்தமாக). பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் 62, 63, 64,... என அமையுமாறு ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

67	66	68	68	66	67	68	69	69	65
65	67	69	65	64	67	66	69	67	63
66	68	64	65	69	66	62	64	68	68
70	70	70	65	67	67	67	64	64	69
66	66	68	66	68	69	66	64	65	65
66	67	69	63	63	65	67	67	63	69
63	65	71	66	68	67	66	63	65	64
68	62	65	67	65	70	68	68	62	65
70	69	66	66	71	64	63	64	67	67
66	68	66	66	67	64	65	64	65	66

§ 1.13. விளக்கப் படங்கள்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் எண் குவியலாகத்தான் தோன்றும். தக்க முறையில் பாகுபடுத்தி ஏற்றதோர் பட்டியலில் அமைத்தல் ஆய்விற்கு அவசியம் என்று கண்டோம். அவ்விவரங்களையே விளக்கப் படங்களில் அமைத்துக் காட்டினால் சராசரி அறிவுடைய சாதாரண மக்களும் எளிதில் புரிந்து கொள்வர். புள்ளியியல் வல்லுநர்களின் மேலாய்விற்கும் உறுதுணையாக இவ் விளக்கப் படங்கள் அமையும். பாகுபடுத்தப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள், பட்டை விளக்கப் படங்கள் (Bar diagrams), வட்ட விளக்கப் படங்கள் (Pie diagrams), உருவக விளக்கப் படங்கள் (Pictograms), பரவல் செவ்வகங்கள் (Histograms), நேர்கோட்டுப் படங்கள் (Line diagrams), அலைவெண் வரைகள் (Frequency curves), ஓகைவ் வரைகள் (Ogive curves), லாரன்சு வரைகள் (Lorenz curves) என்ற பலவித விளக்கப் படங்களில் அமைத்துக் காட்டப் படுகின்றன.

விவரங்களை விளக்கப் படங்களில் அமைக்கும்பொழுது நாம் மனத்திற் கொள்ளவேண்டியவை : (i) ஒவ்வொரு படத்திற்கும் தலைப்புக் கொடுத்தல் வேண்டும்; (ii) படத்தைப் பார்த்தவுடன் விவரங்கள் எளிதிற் புரியும் வண்ணம் இருத்தல் வேண்டும்; (iii) விவரத்திலுள்ள மதிப்புகளின் தரத்தினைப் பின் குறிப்பாகத் தரவேண்டும்; (iv) விளக்கப் படங்களில் அச்சுகள் (Axes) ஒரே

சீராகப் பகுக்கப்பட (Graduation) வேண்டும்; அவ்வச்சுகள் எவற்றைக் குறிக்கின்றன என்றும் எழுத வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக, நாட்டின் ஏற்றுமதியைக் காட்டும் விளக்கப் படத்தில் பல்வேறு நாடுகளை x அச்சிலும், அந்நாடுகள் ஏற்றுமதி செய்த பொருள்களின் அளவையோ அல்லது பொருள்களின் மதிப்பையோ பாகுபடுத்திய y அச்சிலும் கொடுக்கலாம்.

சில விளக்கப் படங்களில் பலவித வண்ணங்களை உபயோகித் தல் அவசியமாக இருக்கும்; அல்லது விளக்கப் படங்களின் சில பகுதிகளை வெவ்வேறு குறியீடுகளால் (படுக்கைக் கோடுகளாகவோ, நெடுக்கைக் கோடுகளாகவோ அல்லது வேறு எவ்வகையிலோ) அமைக்கவேண்டி இருக்கும். அப்பொழுது ஒவ்வொரு வண்ணமும் அல்லது ஒவ்வொரு குறியீடும் எதைக் குறிக்கின்றது என் பதனைப் பின் குறிப்பாகத் தரவேண்டும். சில தருணங்களில் ஒரே படத்தில் மூன்று அல்லது நான்கு நேர்கோடுகளோ அல்லது வளைகோடுகளோ வரைய வேண்டிய அவசியம் ஏற்பட லாம். உதாரணமாக மூன்று நாடுகளின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி, அந்நியச் செலாவணியின் மிச்சம் ஆகியவற்றை ஒரே படத்தில் குறித்துக் காட்டலாம். இதில் மூன்று வெவ்வேறு நிறங்களை உபயோகிக்க வேண்டும்.

எனினும் ஒரே படத்தில் நிறைய வண்ணங்களைப் பயன்படுத் தினுல் குழப்பம்தான் விளையுமேயன்றி வேறென்றும் புலப்படாது. இதனைத் தவிர்க்க, விவரங்களைப் பல பிரிவுகளாக்கி மூன்று அல்லது நான்கு படங்களில் அமைத்துக் காட்டலாம்.

எல்லாவற்றிற்கும் மேலாக நினைவிற் கொள்ள வேண்டியது யாதெனில், விளக்கப் படங்கள் அனைவருக்கும் எளிதிற் புரியும் வண்ணமும் தெளிவாகவும் வரையப்படல் வேண்டும். என்பதே ஆகும்.

சுருங்கக் கூறின், புள்ளி விவரங்கள் காட்டும் விளக்கங்களையும் வேறுபாடுகளையும் வளரும் தன்மைகளையும் ஒப்பு நோக்கித் தெளிவு படும் வண்ணம் விளக்கப் படங்கள் அமைந்திருக்க வேண்டும்.

§ 1.14. பட்டை விளக்கப் படங்கள் (Bar Diagrams)

பட்டைப் பட்டையாக சம அகலமுள்ள பல செவ்வகங்களைக் கொண்ட விளக்கப் படத்திற்குப் **பட்டை விளக்கப் படம்** என்பது பெயர். (அவை நெடுக்கையாகவோ அல்லது படுக்கையாகவோ இருக்கலாம்.) விவரங்களின் அளவிற்கேற்ப இவற்றின் நீளங்கள் மாறும். இச் செவ்வகங்கள் யாவும் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது

வரையப்படும். ஒரு பட்டைக்கும் அடுத்ததற்குமுள்ள இடைவெளி ஒரே சீராக இருக்கும். புள்ளி விவரங்களில் தரப்படும் பல வகைப் பொருள்களின் அளவுகளை எளிதில் அறிந்திட இப்பட்டைச் செவ்வகங்களுக்கிணையாக ஒரு கோடு வரைந்து அதைப் பகுத்து அளவிட்டுக்கொள்ள வேண்டும். ஒவ்வொரு செவ்வகத்திற்குக் கீழும் அது எதைக் குறிக்கின்றது என்று எழுத வேண்டும். பட்டியலுக்கான தலைப்பை விளக்கப் படத்திற்கு மேலோ அல்லது கீழோ எழுத வேண்டும். எல்லாச் செவ்வகங்களும் ஒரே வண்ணத்தில் பட்டை தீட்டப்படல் வேண்டும்.

சில நேரங்களில் மாறியிலுள்ள மொத்த அளவையும் இரண்டு மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரித்து, அவற்றை உப மாறிகளாகக் கொள்ள வேண்டியிருக்கும். இதைப் பட்டை விளக்கப் படத்தில் குறிக்க, ஒவ்வொரு பட்டைச் செவ்வகத்தையும் இப் பிரிவுகளுக்கேற்ப பலவாறு பிரித்து வெவ்வேறு நிறங்களில் அமைத்துக் காட்டல் வேண்டும்.

சிறு சிறு சதுரங்களை மேலே பயன்படுத்திய வண்ணங்களில் அமைத்து ஒவ்வொரு சதுரமும் எதைக் குறிக்கின்றது என்று எழுத வேண்டும். இவ்வகை விளக்கப் படங்களைப் **பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படங்கள்** என்போம்.

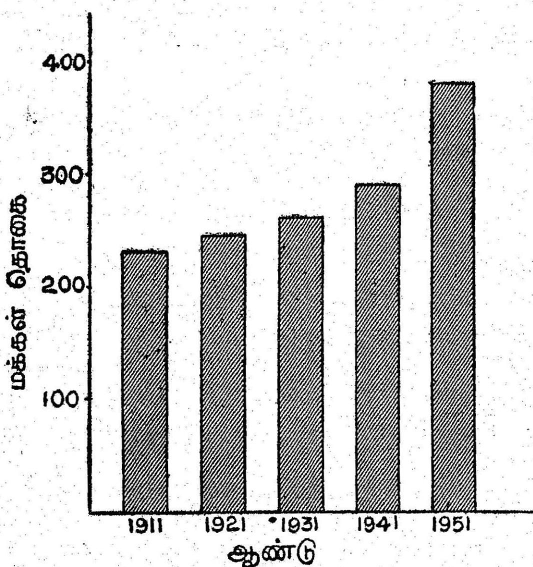
பல்வகைப் பிரிவுகள் கொண்ட எல்லாப் புள்ளி விவரங்களையும் ஒப்பு நோக்க ஏற்றதொரு வழி யாதெனில் ஒவ்வொரு மொத்தத்தையும் நூறாகக் கொண்டு ஒவ்வோர் இணைப் பிரிவையும் (Sub-division) ஏற்ற சதவீத எண்ணில் அமைத்துப் படங்கள் வரைதலேயாகும். இங்கு எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரே நீளத்தில் அமைதல் காணலாம். இதனைச் **சதவீதப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படம்** என்கிறோம்.

சில புள்ளி விவரங்கள், இரு மாறிகளை இணைத்து ஒப்பிடக் கூடியனவாக இருக்கும். உதாரணமாக ஒரு நாட்டின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி அல்லது ஓர் இடத்தில் ஆண் பெண் விவரம் போன்றவற்றை இரு செவ்வகங்களை அடுத்தடுத்து இருவேறு வண்ணங்களில் வரைந்து காட்ட வேண்டும். இதனை **இணைப் பட்டை விளக்கப் படம்** என்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 1911ஆம் ஆண்டிலிருந்து, 1951ஆம் ஆண்டு வரை இந்தியாவின் மக்கட் தொகையைக் குறிக்கும். இவ்விவரத்திற்கேற்ற பட்டை விளக்கப் படம் வரைக.

ஆண்டு	மக்கட் தொகை (மில்லியனில்)
1911	*231·60*
1921	*233·56*
1931	*256·76*
1941	*295·81*
1951	*356·50*

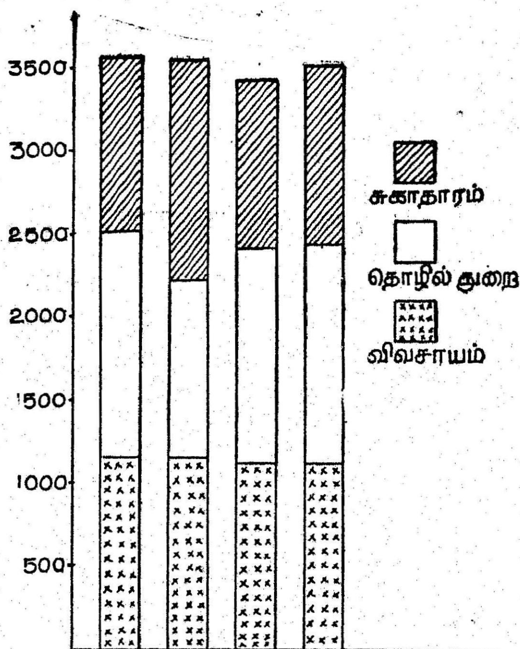


படம் 1

1911–1951 ஆண்டுகளில் இந்தியாவின் மக்கட் தொகையைக் குறிக்கும் பட்டை விளக்கப் படம்

2. ஒரு மாகாணம், விவசாயம், தொழில் துறை, சுகாதாரம் ஆகியவற்றிற்கு ஒரு வருடத்தில் நான்கு தடவைகள் கீழ்க்கண்ட வாறு பண ஒதுக்கீடு செய்கிறது. இதனைப் பல் அங்கப் பட்டையில் அமைக்கவும். (ரூபாய் ஆயிரங்களில்)

	விவசாயம்	தொழில் துறை	சுகாதாரம்	மொத்தம்
முதல் தடவை	1190	1379	1106	3675
இரண்டாம் தடவை	1154	1367	1136	3657
மூன்ரும் தடவை	1142	1288	1089	3519
நான்காம் தடவை	1110	1349	1073	3532



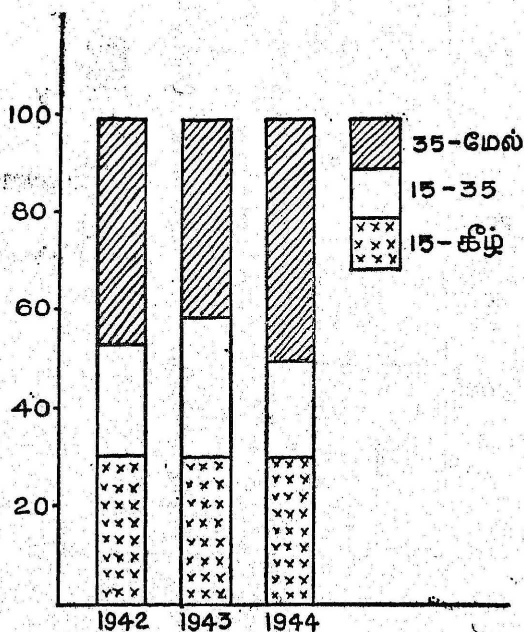
படம் 2

ஒரு மாகாணம், விவசாயம், தொழில்துறை, சுகாதாரம் ஆகியவற்றிற்குச் செய்யும் பண ஒதுக்கீட்டினை விளக்கும் பல்,அங்கப் பட்டை விளக்கப் படம்.

3. *1942-44 ஆண்டுகளில் தண்டனை பெற்றுச் சிறை சென்றவர்களின் பட்டியல் வருமாறு :*

ஆண்டு	15 வயதிற் குட்பட்டவர்கள	15-க்கு மேல் 35 வயதிற் குட்பட்டவர்கள்	35 வயதிற்கு மேற்பட்டவர்கள்
1942	*1455*	*1268*	*2314*
1943	*3065*	*3214*	*4565*
1944	*2602*	*2124*	*4979*

இப் புள்ளி விவரத்தினைச் சதவீதப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படத்தில் அமைத்துக் காட்டுக.



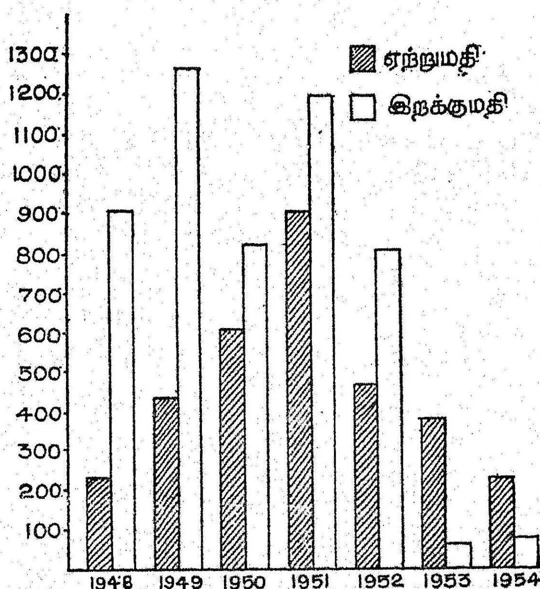
படம் 3

1942–44 ஆண்டுகளில் தண்டனை பெற்றுச் சிறை சென்றவர்களின் விவரத்தினைக் காட்டும் சதவீதப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படம்

4. 1948 முதல் 1954 வரை தாய்லாந்தோடு இந்தியாவின் ஏற்றுமதி இறக்குமதி பற்றிய விவரம் வருமாறு :

ஆண்டு	ஏற்றுமதி	இறக்குமதி
1948	237	853
1949	419	1234
1950	585	815
1951	876	1164
1952	439	772
1953	361	45
1954	222	75

இதனை ஏற்ற விளக்கப் படத்தில் அமைத்துக் காட்டுக.



படம் 4

1948 முதல் 1954 வரை தாய்லாந்தோடு இந்தியாவின் ஏற்றுமதி இறக்குமதியினைக் காட்டும் இணைப் பட்டை விளக்கப் படம்

§ 1.15. வட்ட விளக்கப் படங்கள்

இவ்வகை விளக்கப் படங்களை நாம் வார இதழ்களிலும் மாத இதழ்களிலும் காணலாம். படிக்காத பாமர மக்களும் எளிதிற் புரிந்துகொள்ளும் வண்ணம் அமையும் இவ் வகை விளக்கப் படங்களில் விவரங்களை ஒரு வட்டத்தின் பல அங்கங்களாகக் காட்டலாம். ஒரு தொழிலாளி அல்லது நடுத்தரக் குடும்பத்தைச் சார்ந்தவரொருவர் ஒரு ரூபாயைத் தம் தேவைகளுக்கு எவ்வகையில் செலவழிக்கின்றார் என்பதனை வட்ட விளக்கப் படம் கொண்டு தெளிவாக்கலாம். ஒரு ரூபாயைக் குறிக்க ஏற்ற ஓர் ஆரத்தில் வட்டத்தை வரைந்து கொள்ள வேண்டும். ஒவ்வொரு பைசாவிற்கும் $3\cdot6^\circ$ என மனத்திற் கொண்டு ஒவ்வொரு செலவினத்திற்கும் ஏற்ற கோணத்தில் வட்ட வில்களைப் பிரிக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு செலவினத்திற்கான சதவீதமும் தரப்படல் வேண்டும். பிரிக்கப்பட்ட வெவ்வேறு வட்டப் பகுதிகளை வெவ்வேறு வண்ணங்களில் காட்ட வேண்டும்.

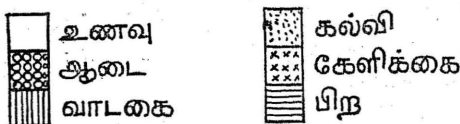
விவரங்கள் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிலைகளின் இனங்களாகக் கொடுக்கப்பட்டால், ஒவ்வொரு நிலையின் இனங்களையும் தனித்தனியாக வெவ்வேறு வட்டங்களில் காட்ட வேண்டும். இனங்களின் கூடுதல் எண்ணிக்கைகளின் வர்க்க எண்களின் விகிதத்திற்கேற்ப ஆரங்களைக் கொண்டு வட்டங்கள் வரையப்படல் வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக மூன்று நிலை இனங்களின் தனித்தனிக் கூடுதல்கள் 357, 439, 548 என அமைந்தால், ஆரங்களை $\sqrt{357}$, $\sqrt{439}$, $\sqrt{548}$ என்ற விகித அளவுகளில் எடுத்துக் கொண்டு வட்டங்கள் வரையப்படல் வேண்டும்.

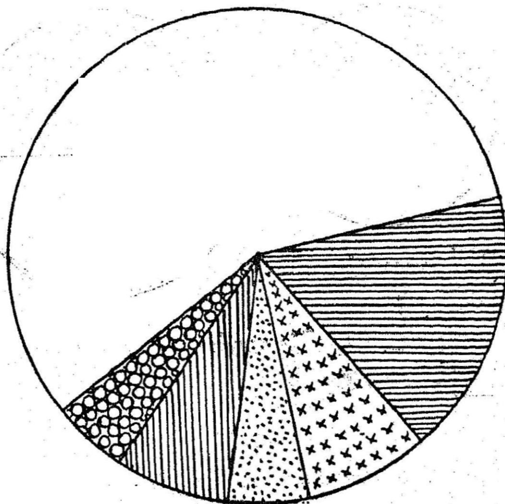
உதாரணம் 1 : ஒரு தொழிலாளியின் மாத வருமானம் 300 ரூபாய். அதில் அவருடைய செலவுகள் வருமாறு :

உணவிற்கு	ரூ.	180
ஆடைகளுக்கு	ரூ.	15
வாடகைக்கு	ரூ.	21
கல்விக்கு	ரூ.	12
கேளிக்கைகளுக்கு	ரூ.	24
பிற செலவுகளுக்கு	ரூ.	48

மொத்தம் ரூ. 300

இதை வட்ட விளக்கப் படத்தில் அமைத்துக் காட்டுக.





படம் 5

ஒரு தொழிலாளி தனது மாத வருமானத்தில் செய்யும் செலவுகளைக் காட்டும் வட்ட விளக்கப் படம்

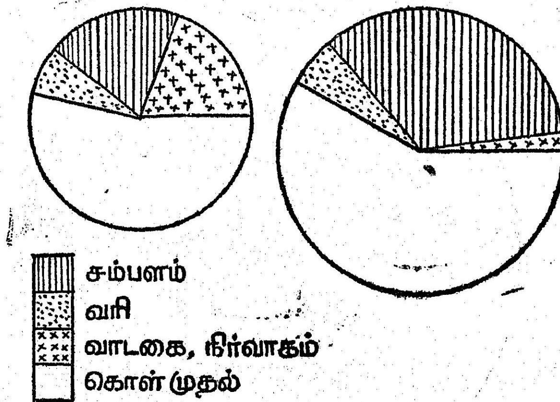
வசதியான ஓர் ஆரத்தில் வட்டமொன்று முதலில் வரைந்து கொள்ள வேண்டும். 300 ஐ 360° எனக் கொண்டு ஒவ்வோர் அங்கத்திற்கும் ஏற்ற கோணத்தில் வட்ட வில்களைப் பிரிக்கவேண்டும்.

உதாரணம் 2 : கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கான வட்ட விளக்கப் படம் வரைக.

இரண்டு கம்பெனிகளின் செலவினங்களைக் காட்டும் பட்டியல் வருமாறு :

	A கம்பெனி	B கம்பெனி
	(ரூபாய் இலட்சங்களில்)	
1. மூலப்பொருளின் கொள்முதல்	1,251	2,365
2. சம்பளம்	438	1,492
3. வாடகை, நிர்வாகம்	465	34
4. வரி, மற்றும் இதரச் செலவுகள்	141	222
மொத்தம்	2,295	4,113

வட்ட விளக்கப் படத்தில் இரு வட்டங்களின் ஆரங்கள் $\sqrt{2295} : \sqrt{4113}$, அதாவது தோராயமாக 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.



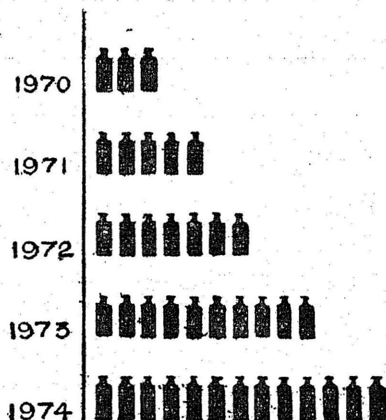
படம் 6

இரு கம்பெனிகளின் செலவினங்களைக் காட்டும் வட்ட விளக்கப் படங்கள்

§ 1.16. உருவக விளக்கப் படங்கள்

ஒரு பண்ணை, தனது பால் விற்பனையின் கடந்த 5 வருட வளர்ச்சியினைக் காட்டும் விளம்பரம் தர விரும்பினால் அதற்கேற்றதொரு சாதனம் உருவக விளக்கப் படமாகும். கடந்த 5 வருடங்களில் தோராயமாக முறையே 3, 5, 7, 10, 13 இலட்சம் லிட்டர்கள் பால் விற்பனை செய்திருந்தால், இவ்வளர்ச்சியினைக் குறிக்க ஒவ்வொரு வருடத்திற்கும் எதிரே முறையே 3, 5, 7, 10, 13 பால் குடுவைகள் வரிசை வரிசையாக வரைந்து காட்டுவர். படிக்காத பாமர மக்களும் புரிந்து கொள்வதோடு ஏனையோருக்கு எடுத்துக் கூறவும் இது பயன்படும். அரசினரின் புள்ளியியல் துறையில் மிக அதிகமாக இது கையாளப்படுகின்றது. கல்வி சம்பந்தப்பட்ட பொருட்காட்சிகளில் இவ்வகை விளக்கப் படங்களை மாணவர் காணலாம். சம அளவுடைய பல குடுவைகளுக்குப் பதிலாக, பண்ணையின் வளர்ச்சியினைச் சிறியதும் பெரியதுமான குடுவைகளைக் கொண்டு விளக்கலாம். ஆனால் இம் முறையில் குழப்பங்கள் விளைவதோடு, உண்மையினைத் திரித்துக் கூறவும் வாய்ப்புகளுண்டு. வெவ்வேறு இனங்களின் மதிப்பிற்கேற்ற விகிதத்தில் உருவகப் படங்கள் வரைதல் வேண்டும்.

இரு நாடுகளின் படைப்பலத்தை ஒப்பிடுங்காலை, காலாட் படையில் உள்ள வீரர்களின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ற விகிதத்தில் வீரர்களை வரைந்தும், கப்பல் படையில் உள்ள கப்பல்களின்



படம் 6A

ஒரு பண்ணையின் பால் விற்பனையின் 5 வருட வளர்ச்சியினைக் காட்டும் உருவக விளக்கப் படம்

எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ற விகிதத்தில் கப்பல்களை வரைந்தும், அவ்வாறே விமானப் படைக்காக விமானங்களை வரைந்தும் ஒப்பிடுவது புள்ளியியல் மரபாகும்.

§ 1.17. நேர்கோட்டுப் படங்கள்

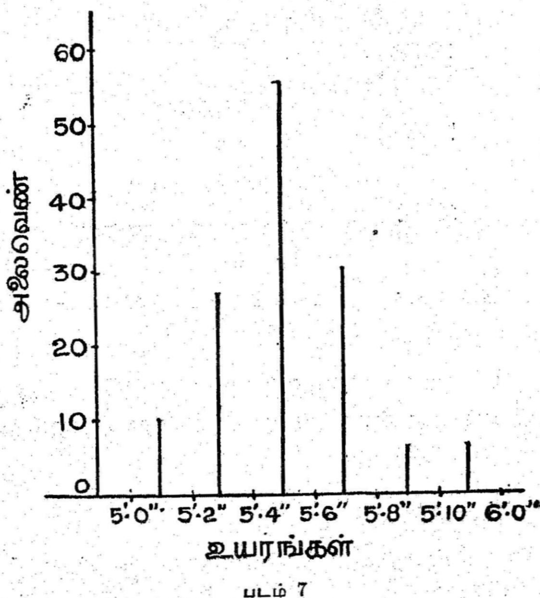
அலைவுப் பரவல் அல்லது நிகழ்வெண் பரவலில் தரப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களை அமைத்துக் காட்டச் சிறப்பான விளக்கப் படங்களாவன: (i) நேர்கோட்டுப் படங்கள் (ii) பரவல் செவ்வகங்கள் (iii) அலைவெண் பலகோணப் படங்கள் (iv) அலைவுப் பரவல் வரைகள் (v) ஓகைவ் வரைகள் (vi) லாரன்ஸ் வரைகள். இவற்றை அமைக்கும் விதத்தினைக் காண்போம்.

பிரிவின் தூரங்களை x அச்சிலும், அலைவெண்ணை y அச்சிலும் கொண்டு, பிரிவின் மைய மதிப்புகளை x அச்சில் எடுத்துக் கொண்டு அதற்குரிய புள்ளிகளின் வழியாக y அச்சிற்கு இணையாக அலைவெண் மதிப்பிற்கேற்ற விகிதத்தில் நேர்கோடுகள் வரைந்தால் அதை நேர்கோட்டுப் படம் என்போம். இதை, தொடர் மாறிகள், தனித்த மாறிகள் ஆகிய இரண்டிற்கும் வரையலாம். புள்ளியலில் இது முக்கியமானதொன்று ஆகும்.

உதாரணம்: கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 130 மாணவர்களின் உயரங்களைக் காட்டுகின்றது.

உயரங்கள்	5′0″—5′2″	5′2″—5′4″	5′4″—5′6″	5′6″—5′8″	5′8″—5′10″	5′10″—6′0″
அலைவெண்கள்	10	26	56	28	7	7

இதை நேர்கோட்டுப் படத்தில் அமைத்துக் காட்டுக.



படம் 7

130 மாணவர்களின் உயரங்களைக் கொண்ட பரவலைக் காட்டும் நேர்கோட்டுப் படம்

§ 1.18. பரவல் செவ்வகங்கள்

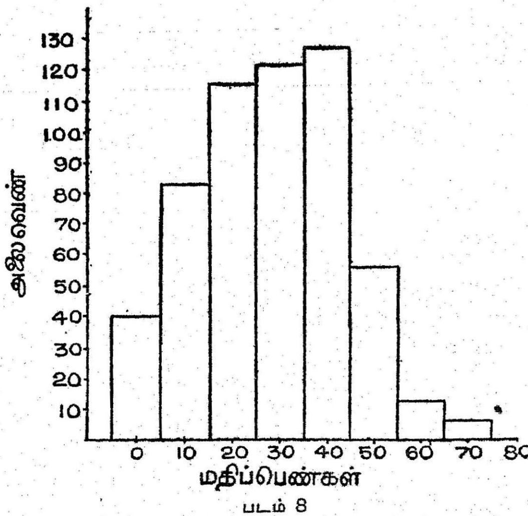
பரவல் செவ்வகங்களும் பட்டைச் செவ்வகங்கள் போன்றவையே. ஆனால் இங்கு ஒரு பட்டைக்கும் அடுத்ததற்கும் இடைவெளி இராது. பட்டைகள் வண்ணம் தீட்டப் பெறா. பிரிவுத் தூரங்களை x அச்சில் கொண்டு அவற்றின்மீது நெடுக்கைப் பட்டைகள் அலைவெண்ணிற்கேற்ற விகிதத்தில் y அச்சிற்கு இணையாக வரைய வேண்டும். அலைவெண் பரவலுக்கு ஏற்றது இப் பரவல் செவ்வகம்; குறிப்பாகத் தனித்த அலைவெண் பரவலுக்குச் சாலச் சிறந்தது. பிரிவின் தூரத்தை x அச்சில் ஓர் அலகாகக் கொண்டால் ஒவ்வொரு பட்டையின் பரப்பும் அப்பிரிவின் அலைவெண்ணிற்குச் சமமாகும்.

எனவே பரவல் செவ்வகத்தின் மொத்த மதிப்பு பரவலின் மொத்த அலைவெண்ணிற்குச் சமமாகும். பிரிவுகள் சீராக ஒரே தூர அளவையில் அமைந்தால், எல்லாச் செவ்வகங்களும் ஒரே அகல முடையனவாக அமையும். பிரிவின் தூரங்கள் சீரற்று மாறுபட்டு அமையின் அவற்றிற்கேற்ப செவ்வகங்களின் அகலமும் மாறுபாடும். எனவே சரியான பரவல் செவ்வகம் அமைக்க, சீரான பிரிவுகள் தேவை என்பது தெளிவு.

உதாரணம்: கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 550 மாணவர்கள் பொருளாதாரப் பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும்.

மதிப்பெண்கள்	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
அலைவெண்	40	82	115	120	123	56	10	4

இதனைப் பரவல் செவ்வகத்தில் அமைத்துக் காட்டவும்.



படம் 8

550 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கொண்ட அலைவெண் பரவலைக் குறிக்கும் பரவல் செவ்வகம்

§ 1,19. அலைவெண் பலகோணப் படங்கள்

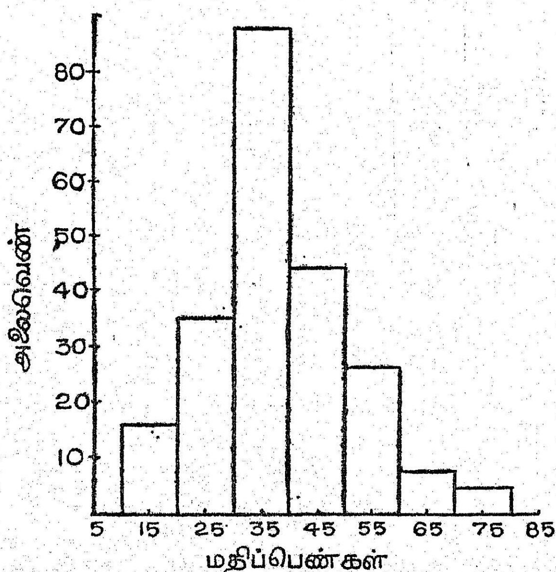
ஒரு பிரிவின் மைய மதிப்பை x தூரமாகவும், அப் பிரிவிற்குரிய அலைவெண்ணை y தூரமாகவும் கொண்டு, புள்ளி இட்டு, இவ்வாறே எல்லாப் பிரிவுகளுக்குமுரிய புள்ளிகளை இட்டு, அவற்றை நேர்கோடுகளால் இணைத்தால் பெறப்படுவது பலகோணமாகும். இப் புள்ளிகள் பரவல் செவ்வகங்களின் உச்சிகளின் மையப் புள்ளிகளே என்பது தெளிவு. [இப் பலகோணம் x அச்சில்

துவங்காது. அவ்வாறே x அச்சில் முடிவுறுது. எனவே எல்லைக்கு முன்னுல் பிரிவின் மைய மதிப்பில் துவக்கி, எல்லைக்குப் பின்னுல் பிரிவின் மைய மதிப்பில் பலகோணத்தை முடிப்பது வழக்கம்.] x அச்சுக்கும் பலகோணத்திற்கும் இடைப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு, பரவல் செவ்வகத்தின் மொத்தப் பரப்பிற்குச் சமம். ஆனுல் பரவல் செவ்வகத்தின் மொத்தப் பரப்பு, பரவலின் மொத்த அலைவெண்ணிற்குச் சமம் எனக் கண்டோம். எனவே x அச்சுக்கும் பலகோணத்திற்கும் இடைப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு பரவலின் மொத்த அலைவெண்ணிற்குச் சமமாகும்.

உதாரணம்: ஒரு கல்லூரி அரையாண்டுத் தேர்வில் 212 மாணவர்கள் வேதியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

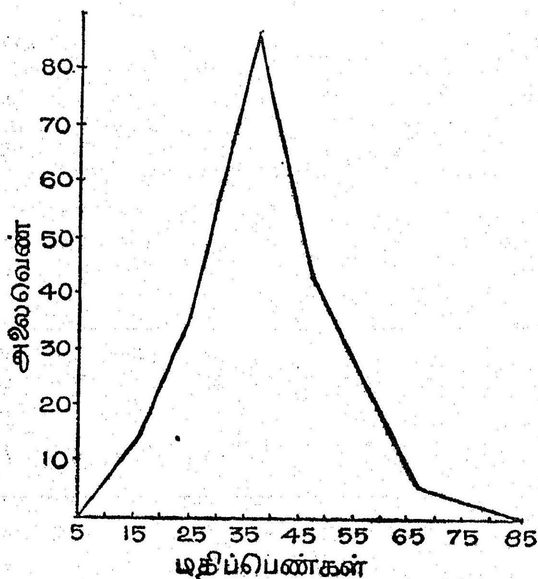
மதிப்பெண்கள்	11—20	21—30	31—40	41—50	51—60	61—70	71—80
அலைவெண்	14	37	88	40	25	5	3

பரவல் செவ்வகம் வரைந்து பலகோணப் படம் வரைக.

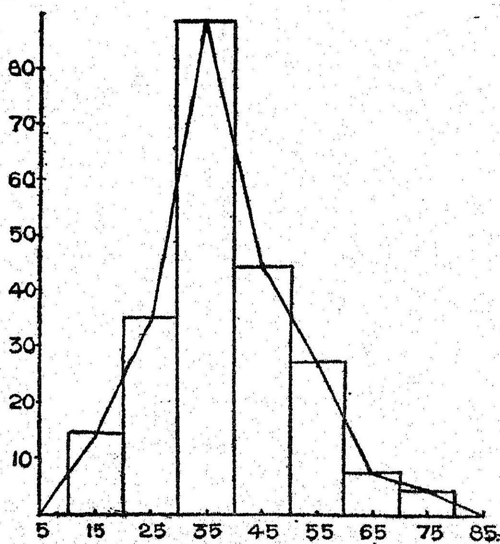


படம் 9

பரவல் செவ்வகம்



படம் 10
பலகோணப் படம்



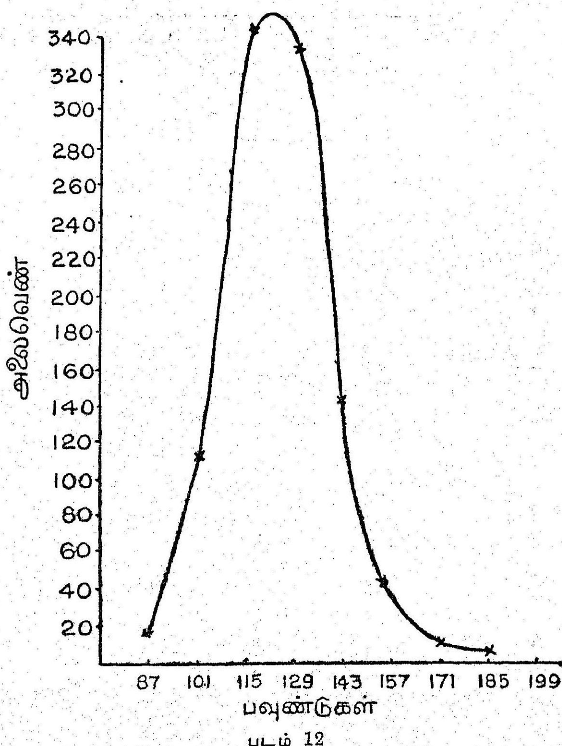
படம் 11
பரவல் செவ்வகமும் பலகோணப் படமும்

§ 1.20. பலகோண வரை

மேற்குறித்த புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் இணைப்பதற்குப் பதிலாக, வளைவுக் கோட்டினால் இணைத்துப் பெறப்படுவது அலைவெண் வரையாகும். இப்புள்ளிகள் வழியாக ஒரு வளைகோடு வரைய இயலவில்லையெனில் குறித்த புள்ளிகளுக்கு மிக அருகில் புள்ளிகள் எடுத்து அவற்றின் வழியாக ஒரு வளைகோடு வரைய வேண்டும். அலைவெண் வரைப்படம் புள்ளியியலில் சிறந்ததொரு பங்கு பெறுகின்றது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

உதாரணம் : 1000 ஆட்களின் எடைகள் கீழ்க் கண்ட அலைவெண் பரவலில் தரப்படுகின்றன. இதற்குரிய பலகோண வரை வரைக.

எடை பவுண்டுகளில்	80-94	94-108	108-122	122-136	136-150	150-164	164-178	178-192
அலைவெண்	12	108	342	332	139	45	14	8



படம் 12

100 ஆட்களின் எடைகள் கொண்ட அலைவெண் பரவலுக்கான பலகோண வரை

§ 1.21. ஓகைவ் வரைகள்

குவிவு அலைவெண்ணுக்காக வரையப்படும் வளைவுக் கோடு ஓகைவ் வரை எனப்படும். முதலில் குவிவு அலைவெண்ணுக்கான பட்டியலை, பிரிவின் மேல் எல்லை, குவிவு அலைவெண் என இரு பகுதிகளாக அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும். பிரிவின் மேல் எல்லையை x அச்சிலும், குவிவு அலைவெண்ணை y அச்சிலும் உற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு புள்ளிகளை வரைதாளில் குறிக்க வேண்டும். பின் அப் புள்ளிகளை வளைவுக் கோட்டால் இணைக்கப் பெறப்படுவது ஓகைவ் வரையாகும். இதனைக் கீழின ஓகைவ் வரை என்பர்.

உதாரணமாக,

பிரிவுகள்	4·0-4·2	4·2-4·4	4·4-4·6	4·6-4·8	4·8-5·0	5·0-5·2	5·2-5·4	5·4-5·6	5·6-5·8
அலைவெண்	1	2	18	35	45	31	24	6	1

என்ற பரவலுக்கான ஓகைவ் (கீழின ஓகைவ்) வரைய, கீழ்க் கண்டவாறு பட்டியல் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

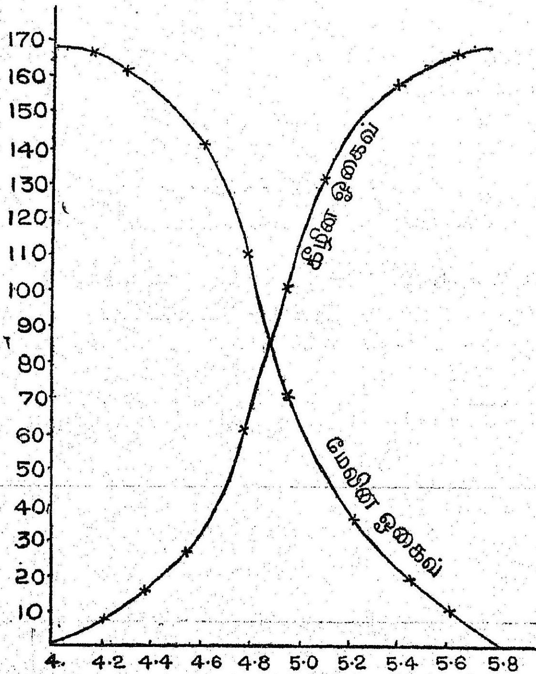
பிரிவின் மேல் எல்லை (x)	4·2	4·4	4·6	4·8	5·0	5·2	5·4	5·6	5·8
குவிவு அலை வெண் (cf)	1	3	21	56	101	132	156	162	163

x ஐ x அச்சிலும், cf ஐ y அச்சிலும் உற்ற பட அளவைகளில் எடுத்து, புள்ளிகளை வரைதாளில் குறித்து, அப் புள்ளிகளை வளைவுக் கோட்டால் இணைத்தால் கீழின ஓகைவ் பெறப்படும்.

மேலின ஓகைவ் வரையப் பட்டியலைக் கீழ்கண்டவாறு அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

பிரிவின் கீழ் எல்லை (x)	4·0	4·2	4·4	4·6	4·8	5·0	5·2	5·4	5·6
குவிவு அலை வெண் (cf)	163	162	160	142	107	62	31	7	1

x ஐ x அச்சிலும், cf ஐ y அச்சிலும் உற்ற பட அளவைகளில் கொண்டு, புள்ளிகளை வரைதாளில் குறித்து, அப்புள்ளிகளை வளைவுக் கோட்டால் இணைத்தால் பெறப்படுவது மேலின ஓகைவ் வரையாகும்.



படம் 13

மேற்கண்ட பட்டியலுக்கான மேலின, கீழின ஓகைவ் வரைகள்

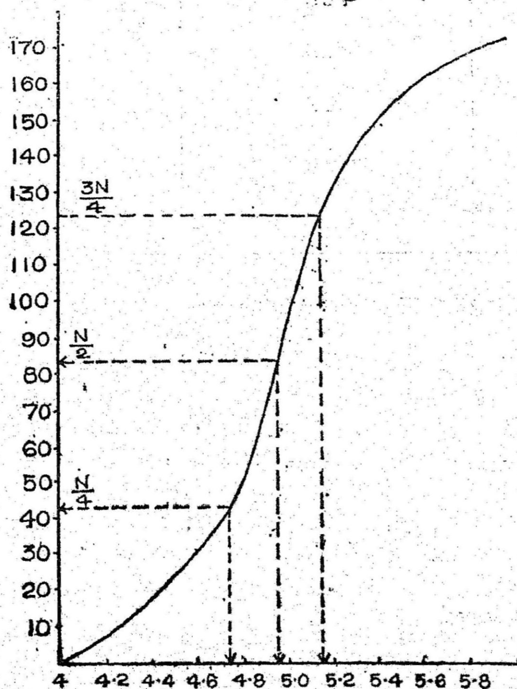
ஓகைவ் வரையின் தன்மைகள்: முன்பே கூறியபடி ஓகைவ் வரை குவிவு அலைவெண்ணிற்கான வரையாகும். அலைவெண்கள் எவ்விடத்தும் எதிர்மறையாக இராவாகையால், ஓகைவ் வரைகள் ஏறுமுகத்தில்தானிருக்கும். x அச்சில் எந்தப் புள்ளிக்கும் அதற்கேற்ற y அச்சுத் தூரத்தினைக் கணக்கிடலாம். அத்தூரம் அம்மதிப்பிற்கான குவிவு அலைவெண்ணாகும். எனவே ஓகைவ் வரையைப் பலகோண வரையின் தொகை வரை (Integral curve of Frequency curve) என்போம். ஓகைவ் வரையைக் கொண்டு அலைவுப் பரவல் சம்பந்தப்பட்ட பல முக்கிய கெழுக்களைக் காணலாம். அவையாவன: (i) முகடு (ii) இடைநிலை (iii) கீழ்க் கால்மானம் (iv) மேல் கால்மானம்.

எந்தவொரு மாறியின் மதிப்பு மிக அதிகமான தடவைகளில் நிகழ்கின்றதோ அம் மாறியின் மதிப்பு, அம் மாறி மதிப்புகளின் முகடாகக் கொள்ளப்படுகின்றது. பலகோண வரையில் உச்சிப்

புள்ளிக்கு ஒத்த x அச்சுத் தூரம் முகடாகும். ஆனால் ஓகைவ் வரையில் வளைவு மாற்றப் புள்ளி அல்லது திருகுப் புள்ளியின் x அச்சுத் தூரமே முகடாகும்.

ஓர் அலைவுப் பரவலில் மொத்த அலைவெண் N எனில் ஓகைவ் வரையில் $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பிற்கான y அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து x அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் நேர் கோடு வரையினை வெட்டும் புள்ளியின் x அச்சுத் தூரம் இடைநிலையைக் காட்டும். $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$ என்ற மதிப்புகளுக்கான y அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து x அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் நேர் கோடுகள் ஓகைவ் வரையினை வெட்டும் புள்ளிகளின் x அச்சுத் தூரங்கள் முறையே கீழ்க் கால் மானம், மேல் கால்மானம் எனப் படும். இடைநிலைக் கீழ்க் கால்மானம், மேல் கால்மானம் ஆகியவற்றின் பங்கினைப் பின்வரும் அத்தியாயங்களில் காணலாம்.

உதாரணம்: § *1.20*-ல் கண்ட உதாரணத்திற்கு இடைநிலை, கீழ்க் கால்மானம், மேல் கால்மானம் ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி.



படம் 14

$N = 163$, எனவே $\frac{N}{2} = 81 \cdot 5$; $\frac{N}{4} = 40 \cdot 75$; $\frac{3N}{4} = 122 \cdot 25$

எனவே இடைநிலை $= 4 \cdot 94$

கீழ்க் கால்மானம் $= 4 \cdot 76$

மேல் கால்மானம் $= 5 \cdot 18$

§ 1.22. லாரன்ஸ் வரை

இரு நகரங்களில் நிலச் சொந்தக்காரர்களின் விவரம் வருமாறு :

நிலத்தின் சராசரி அளவு ஏக்கரில்	A நகரத்தில் நிலச் சொந்தக் காரர்களின் எண்ணிக்கை	B நகரத்தில் நிலச் சொந்தக் காரர்களின் எண்ணிக்கை
$2\frac{1}{2}$	592	1305
$7\frac{1}{2}$	788	447
15	449	202
35	182	84
75	22	7
200	2	1

இதனை ஏற்ற லாரன்ஸ் வரைகளில் அமைக்கவும்.

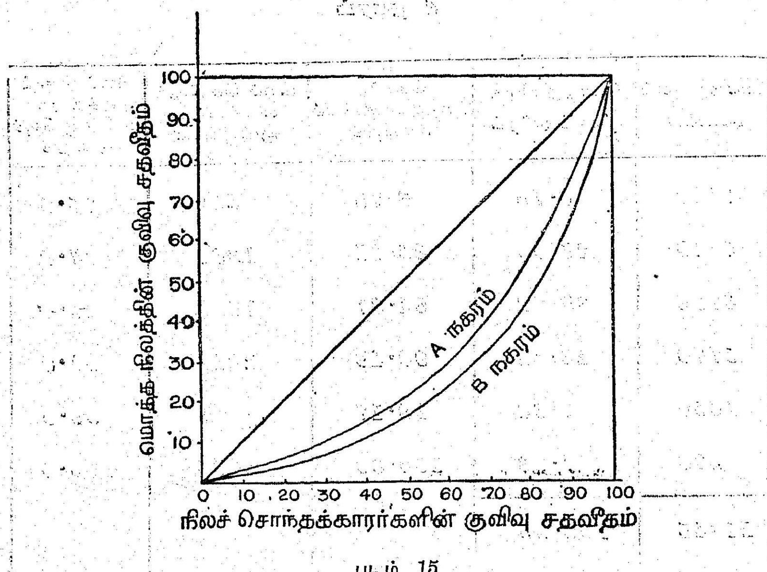
மொத்த நிலத்தின் குவிவுச் சதவீதத்தையும், நிலச் சொந்தக்காரர்களின் குவிவுச் சதவீதத்தையும் கணக்கிட்டு, அவற்றை முறையே y அச்சிலும், x அச்சிலும் கொள்க. x அச்சை 100 வரையில் பகுத்து, அதே பட அளவையில் y அச்சையும் 100 ஆகப் பகுக்கவேண்டும். இரு குவிவுச் சதவீத எண்களையும் வரைதாளில் குறித்து, அப் புள்ளிகளை வளைகோட்டால் இணைத்தால் A நகரத்தின் நிலச் சொந்தக்காரர்களின் பரவலுக்கான லாரன்ஸ் வரை கிடைக்கும். அவ்வாறே B நகரத்திற்கும் லாரன்ஸ் வரை வரையலாம்.

A நகரம்

மொத்த நிலம் ஏக்கரில்	மொத்த நிலத்தின் சதவீதம்	மொத்த நிலத்தின் குவிவுச் சதவீதம்	நிலச் சொந்தக்காரர்களின் குவிவு எண்	நிலச் சொந்தக்காரர்களின் குவிவுச் சதவீதம்
1480	6·75	6·75	592	25·9
5910	26·90	33·65	1380	67·8
6735	30·72	64·37	1829	84·9
5770	26·12	90·49	2011	99·0
1650	7·68	98·17	2033	99·9
400	1·83	100·00	2035	100·0
21945	100·00			

B நகரம்

மொத்த நிலம் ஏக்கரில்	மொத்த நிலத்தின் சதவீதம்	மொத்த நிலத்தின் குவிவுச் சதவீதம்	நிலச் சொந்தக்காரர்களின் குவிவு எண்	நிலச் சொந்தக்காரர்களின் குவிவுச் சதவீதம்
3265·5	25·37	25·37	1305	64·36
3352·5	26·07	51·44	1752	84·65
3030	23·57	75·01	1954	95·50
2940	22·87	97·88	2038	99·61
75	·57	98·45	2045	99·95
200	1·55	100·00	2046	10·000
12860	100·00			



படம் 15

இரு நகரங்களில் நிலச் சொந்தக்காரர்களின் பரவலுக்கான லாரன்ஸ் வரை

பயிற்சி

1. *கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒரு நாட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட வருடத்தில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் அளவுகளாகும். அதற்கேற்ற பட்டை விளக்கப் படம் அமைத்துக் காட்டுக.*

சர்க்கரை	293·2
சிமெண்ட்	285·1
நிலக்கரி	133·6
சணல்	88·2
இரும்பு	125·1
பருத்தி	127·6

2. 1970-73 ஆண்டுகளில் ஒரு நகரில் தண்டனையடைந்து சிறை சென்றவர்களின் பட்டியல்:

ஆண்டு	களவு குற்றங்களுக்காக தண்டனையடைந்தோர்	அரசியல் போராட்டங்களில் சிறை சென்றோர்	பிற காரணங்களால் சிறை சென்றோர்
1970	145	168	231
1971	306	324	456
1972	260	214	479
1973	151	172	301

இதனைப் பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப் படங்களிலும், சதவீதப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படங்களிலும் அமைத்துக் காட்டுக.

3. இரண்டாவது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தில் பல்வேறு துறைகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட நிதி நிலையினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டுகிறது.

விவசாயம்	565	கோடி ரூபாய்
பாசனம்	458	,,
மின்சாரம்	440	,,
தொழில் முன்னேற்றம்	891	,,
போக்குவரத்து	1384	,,
சமூக சேவை	946	,,
பிற இனங்கள்	116	,,

இதனை வட்ட விளக்கப் படத்தில் அமைக்கவும்.

4. 534 மாணவர்கள் ஆங்கிலத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

பிரிவுகள்	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
அலைவெண்	1	30	80	140	220	60	3

இதற்கேற்ற நேர்கோட்டுப் படம் அமைக்க.

5. சமச்சீரான எட்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப் பட்டன. இவ்வாறு 256 தடவைகள் சுண்டப்பட்டன. ஒவ்வொரு தடவையும் எத்தனை தலைகள் விழுந்தன எனக் கணக்கிட்டுக் கீழே பட்டியலாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இதற்கான பரவல் செவ்வகம் வரைக.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8
அலைவெண்	2	6	30	51	68	55	33	10	1

6. கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்குரிய விளக்கப் படங்களை வரைக.

உயரம் அங்குலங்களில்	அலைவெண்
59—61	3
61—63	13
63—65	54
65—67	111
67—69	128
69—71	85
71—73	30
73—75	6
75—77	1

7. 150 மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் வருமாறு:

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
அலைவெண்	2	13	22	38	47	22	6

இதற்குரிய ஓகைவ் வரைக.

8. இரு நகரங்களிலுள்ள ஆலைகளின் வருட இலாபம் வருமாறு:

சராசரி வருட இலாபம் ரூ.	A நகரத்திலுள்ள ஆலைகள்	B நகரத்திலுள்ள ஆலைகள
(ஆயிரங்களில்)		
10	157	136
20	78	80
30	43	43
40	22	20
50	10	10
75	10	8

இதனை ஏற்ற லாரன்ஸ் வரைகளில் அமைக்க,

2. மையப் போக்கின் அளவைகள்

§ 2.1. அறிமுகம்

ஓர் அலைவுப் பரவலுக்கான பலகோண வரையினின்று (i) அலைவெண்ணின் உச்சி அல்லது பலகோண வரையின் உச்சிப் புள்ளி (ii) இப்புள்ளியின் இரு பக்கங்களிலும் அமைந்த வரையின் விரிவு (iii) இப் புள்ளியைப் பொருத்து வரையின் சமச்சீர்த்தன்மை (iv) உச்சிப் புள்ளியில் வரை பரந்திருக்கின்றதா அல்லது கூர்மை யாக இருக்கின்றதா (Peakedness) என்ற விவரம் ஆகியவை அறியப் படும். இவை சிறப்பாகக் குறிப்பிட்டு அறியத்தக்கவை; எனினும் ஒப்பிடுவதற்கு ஏற்றவை அல்ல. எனவே இவற்றைக் கணித வாயிலாக அளந்து எண்களால் குறிப்பிட்டு எழுத வேண்டியது அவசியம் ஆகின்றது. இனி இவற்றை எவ்வாறு அளப்பது எனக் காண்போம்.

§ 2.2. சராசரிகள்

ஒரு பரவலில் அடங்கியுள்ள எல்லா வித அம்சங்களின் அளவு களைப் பிரதிபலிக்கின்ற ஓர் அளவே அப்பரவலின் சராசரி எனலாம். புள்ளி விவரத்தின் மையப் போக்கினைக் காணப் பயன் படுகின்ற அளவைகளாகிய சராசரிகள் பல உண்டு. வெவ்வேறு தருணங்களில் வெவ்வேறு சராசரிகள் பயன்படுகின்றன. அவை யாவன: (i) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean) (ii) இடைநிலை (Median) (iii) முகடு (Mode) (iv) பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean) (v) ஹார்மோனிக் அல்லது இசைச் சராசரி (Harmonic Mean) (vi) நிறுத்திய கூட்டுச் சராசரி (Weighted Mean).

இச் சராசரிகளை ஓர் எண் கூட்டத்திற்கும், ஓர் அலைவுப் பரவ லுக்கும் எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்பதை ஈண்டுக் காண்போம்.

§ 2.3. கூட்டுச் சராசரி

எண் கூட்டத்திலுள்ள எல்லா எண்களையும் கூட்டி, கூட்டுத் தொகையை, எண் கூட்டத்திலுள்ள எண்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கும்.

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்ற n மதிப்புகளின் கூடுதல் Σx_r ஆகும். இதனை n ஆல் வகுத்தால் அவ்வெண் கூட்டத்தின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ கிடைக்கும்.

$$\text{அதாவது } \bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n}$$

ஓர் அலைவுப் பரவலில் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பன n மைய மதிப்புகளாகட்டும். $f_1, f_2, \ldots, f_n$ என்பன அப்பரவலில் முறையே அம் மதிப்புகளின் அலைவெண்களாகட்டும். எனவே அப்பரவலின் கூடுதல் மதிப்பு $f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots\ldots + f_n x_n = \Sigma f_r x_r$ ஆகும்.

இதிலுள்ள மொத்த அங்கங்களின் எண்ணிக்கை $f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n = N$ ஆகும்.

$$\text{எனவே ஓர் அலைவுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N}$$

ஓர் அலைவுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடக் குறுக்கு வழி :

ஓர் அலைவுப் பரவலில் மைய மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots x_n$ ஆகட்டும். அப் பரவலில் முறையே அம் மதிப்புகளின் அலைவெண்கள் $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ஆக இருக்கட்டும்.

$x_r = A + d_r$ என்க. இதில் A என்பது ஏதாவதொரு மதிப்பென்க.

எனவே $d_r = x_r - A$ ($r = 1, 2, 3 \ldots n$ ஆக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.)

$$\text{ஆகையால் } \bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N} = \frac{\Sigma f_r (d_r + A)}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f_r d_r + \Sigma f_r A}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f_r d_r}{N} + \frac{\Sigma f_r A}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f_r d_r}{N} + A \frac{\Sigma f_r}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f_r d_r}{N} + A . \frac{N}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f_r d_r}{N} + A.$$

A ஐப் பொருத்தமான இடத்தில் எடுத்துக் கொள்ளலாம். இதைவிட மிகச் சுலபமான வழி யாதெனில்,

$x_r = A + c\, d_r$ எனக் கொண்டால், $d_r = \frac{x_r - A}{c}$ ஆகும்.

இங்கு *c* என்பது பிரிவின் தூரமாகும்.

$$\text{எனவே } \bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N} = \frac{\Sigma f_r (A + c\, d_r)}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f_r A}{N} + c \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

$$= A \frac{\Sigma f_r}{N} + c \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

$$= A + c \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

A ஐ மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுக்குரிய மைய மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: பத்து மாணவர்களின் எடை (பவுண்டில்) வருமாறு: 95, 92, 108, 115, 115, 112, 98, 113, 120, 121. கூட்டுச் சராசரி யாது?

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{N} = \frac{1089}{10} = 108 \cdot 9 \text{ பவுண்டு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2: கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடுக.

எடை (பவுண்டில்)	80-94	94-108	108-122	122-136	136-150	150-164	164-178	178-192
அலைவெண்	3	27	86	83	35	11	3	2

முதல் முறை

பிரிவுத் தூரங்களின் மைய மதிப்புகள் (x_r)	அலைவெண் (f_r)	$f_r\ x_r$
87	3	261
101	27	2727
115	86	9890
129	83	10707
143	35	5005
157	11	1727
171	3	513
185	2	370
மொத்தம்	250	31200

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_r\, x_r}{N}$$

$$= \frac{31200}{250} = 124 \cdot 8 \text{ பவுண்டு}$$

இரண்டாம் முறை

பிரிவுத் தூரங்களின் மைய மதிப்புகள் (x_r)	அலைவெண் (f_r)	(d_r)	$f_r d_r$
87	3	—2	—6
101	27	—1	—27
115	86	0	0
129	83	+1	+83
143	35	+2	+70
157	11	+3	+33
171	3	+4	+12
185	2	+5	+10
மொத்தம்	200		+175

இங்கு $c = 14$ ஆகும். $A = 115$ ஆகும்.

$$\text{எனவே } \bar{x} = A + c \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

$$= 115 + 14 \times \frac{175}{250}$$

$$= 115 + 9 \cdot 8$$

$$= 124 \cdot 8 \text{ பவுண்டு}$$

கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள் : கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகளைச் சில தேற்றங்களாகக் காண்போம்.

தேற்றம் 1.

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து, எல்லா அங்கங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

நிருபணம் :

முதற் பகுதி : $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_r}{n}$

ஆகவே $n\,\bar{x} = \Sigma x_r$ என நாம் அறிவோம்.

$\sum_{1}^{n} \bar{x} = \bar{x} + \bar{x} + \ldots\ldots = n\,\bar{x}$ ஆகும்.

x_r-ன் $\bar{x}$-லிருந்து விலக்கம் $= x_r - \bar{x}$

எனவே எல்லா அங்கங்களின் விலக்கக் கூடுதல் $= \Sigma\,(x_r - \bar{x})$

$= \Sigma\, x_r - \Sigma\,\bar{x}$

$= n\,\bar{x} - n\bar{x}$

$= O$

இரண்டாம் பகுதி : அலைவுப் பரவலில்

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, f_r\, x_r}{N}$$

ஆகவே $N\,\bar{x} = \Sigma\, f_r\, x_r$ என அறிவோம்.

எல்லா அங்கங்களின் விலக்கக் கூடுதல் $= \Sigma\, f_r\,(x_r - \bar{x})$

$= \Sigma\, f_r\, x_r - \Sigma\, f_r\,\bar{x}$

$= N\,\bar{x} - \bar{x}\,\Sigma\, f_r$

($\because$ $\bar{x}$ எல்லா உறுப்புகளுக்கும் பொதுவானதாகும்)

$= N\,\bar{x} - N\,\bar{x} = O$

தேற்றம் 2.

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலே மிகச் சிறியதாகும்.

நிருபணம் : $a, b, c,$ ...போன்ற அளவுகள் கொண்ட n அங்கங்கள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். x என்ற ஓர் எண்ணிலிருந்து விலக்கம் காண்பதாகக் கொள்வோம். $g(x)$ என்பது x-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் என்க.

$$\therefore \; g(x) = \Sigma\,(x - a)^2$$
$$= \Sigma\,(x^2 - 2\,a\,x + a^2)$$
$$= \Sigma\, x^2 - \Sigma\, 2\,a\,x + \Sigma\, a^2$$
$$= nx^2 - 2\,x\,\Sigma\, a + \Sigma\, a^2$$

$g(x)$ மிகச் சிறியதெனில் $\dfrac{dg}{dx} = O$ என நாம் அறிவோம்.

இங்கு,

$$\frac{dg}{dx} = 2\,nx - 2\,\Sigma\, a = O$$

அதாவது $\quad x = \dfrac{\Sigma a}{n} = \bar{x}$

எனவே கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலே மிகச் சிறியதாகும்.

தேற்றம் 3.

N_1 அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$, N_2 அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$ எனின், இவ்விரு குழுக்கள் இணைந்த புதிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{N_1\,\bar{x}_1 + N_2\,\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

நிரூபணம் :

முதல் குழுவின் மொத்த மதிப்பு $= N_1\bar{x}_1$

இரண்டாம் குழுவின் மொத்த மதிப்பு $= N_2\bar{x}_2$

இணைந்த குழுவின் மொத்த மதிப்பு $= N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2$

இக்குழுவின் அலைவெண் $= N_1 + N_2$

எனவே, இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1+N_2}$

$$\text{அதாவது } \bar{x} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1+N_2}$$

கிளைத் தேற்றம் :

இதேபோன்று, N_1 அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசாரி $\bar{x}_1$ என்றும், N_2 அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$ என்றும்,............N_k அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_k$ என்றும் இருப்பின் இந்த K குழுக்களுமிணைந்த புதியதொரு குழுவின் கூட்டுச்சராசரி

$\bar{x} = \dfrac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + \ldots\ldots + N_k\bar{x}_k}{N_1+N_2+\ldots\ldots+N_k}$ ஆகும்.

§ 2.4. இடைநிலை

எல்லா அங்கங்களையும் ஏறு வரியிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ அமைத்து நடு அங்கத்தின் மதிப்பை இடை நிலை என்கிறோம். 21 மாணவர்களின் உயரங்களில் இடைநிலை உயரத்தினைக் காண வேண்டுமெனில், எல்லா மாணவர்களையும் ஏறு வரிசையில் நிற்க வைத்து, 11ஆவது மாணவனின் உயரத்தை அளந்தால் இடைநிலை உயரம் பெறப்படும், பத்துப் பத்து மாணவர்கள் இரு பக்கங்கங்களிலும் நிற்பதாலும், 11ஆவது மாணவன் அனைவருக்கும் நடுவில் நிற்பதாலும் அவனை நடு நிலை மாணவன் என்போம்.

22 மாணவர்களிருப்பின் மேற் கூறியவாறே வரிசையில் நிற்க வைத்து 11ஆவது மாணவனின் உயரத்தையும் 12ஆவது மாணவனின் உயரத்தையும் அளந்து, இவ்விரண்டிற்கான கூட்டுச் சராசரி கண்டால் அதுவே 22 மாணவர்களின் இடைநிலை உயரமாகும்.

அதாவது n அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் இடைநிலையைக் காண, ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ

அமைத்து $\frac{n+1}{2}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பைக் காண வேண்டும். n, 21 ஆக இருக்குமிடத்து இடைநிலை 11 ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பாகும். n, 22 ஆக இருக்குமிடத்து இடைநிலை $11\frac{1}{2}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பாகும். அதாவது 11 ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பிற்கும் 12 ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பிற்கும் கூட்டுச் சராசரியாகும்.

இம் முறையில் அலைவுப் பரவலுக்கு இடைநிலையைக் காண இயலாது. அலைவுப் பரவலில், அதன் அலைவுப் பரவல் வரைக்கும், x அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பானது அதன் மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கின்றது எனக் கண்டோம். எனவே எந்தவொரு y அச்சிற்கு இணையான நேர்கோடு இப் பரப்பினை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றதோ, அக்கோடு x அச்சில் வெட்டும் மதிப்பை இடைநிலையாகக் கொள்ள வேண்டும். பெரியதோர் அலைவுப் பரவலில் $\frac{n+1}{2}$ க்குப் பதிலாக $\frac{N}{2}$ என்று கொள்ள வேண்டும். ஓகைவ் வரையினின்று இடைநிலையைக் காணலாம் என்பதை முன் அத்தியாயத்தில் கண்டோம்.

(பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகள் வரைக்கும் குவிவு அலைவெண்களைக் கணக்கிட்டுக் கொண்டே வந்தோமானால்) $\frac{N}{2}$ மதிப்புள்ள குவிவு அலைவெண் எந்தப் பிரிவில் விழுகின்றதென்பதைக் காண்பது எளிது. இப் பிரிவினை ''இடைநிலைப் பிரிவு'' என்கிறோம். இடைநிலைப் பிரிவின் அலைவெண் f என்க. பிரிவுத் தூரம் c என்க. இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க. இடைநிலைப் பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண் m என்க.

l முடியக் குவிவு அலைவெண் $= m$

இடைநிலை முடியக் குவிவு அலைவெண் $= \frac{N}{2}$

$l + c$ முடியக் குவிவு அலைவெண் $= m+f$

l-லிலிருந்து இடைநிலை முடியக்
குவிவு அலைவெண்ணின் அதிகம் $= \frac{N}{2} - m$

எனவே $\left(\frac{N}{2} - m\right)$ ஆகக் குவிவு எண் அதிகமானல், அதன் அளவு

$\frac{c}{f}\left(\frac{N}{2} - m\right)$ அதிகமாகும்.

$$\text{ஆகவே இடைநிலையின் அளவு} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right) \times c}{f}$$

இதனை ஈண்டு நிறுவலாம். இடைநிலைப் பிரிவில் ஓகைவ் வரை ஒரு நேர்கோடாக இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

படம் 16

PQR இடைநிலைப் பிரிவு *AD*-ன் ஓகைவ் வரை.

இங்கு *AD* என்பது *c* பிரிவுத் தூரம் கொண்ட இடைநிலைப் பிரிவாகும். *AP* என்பது *A* முடியக் குவிவு அலைவெண் (*m*) ஐக் குறிக்கும். *RD* என்பது *D* முடியக் குவிவு அலைவெண் $m+f$ ஐக் குறிக்கும். $PT \perp RD$. எனவே $RT = f$ என்பது தெளிவு. $QB = \frac{N}{2}$ எனக் கொண்டு *OB* ஐக் கணக்கிட வேண்டும்.

படத்திலிருந்து $\frac{PS}{PT} = \frac{QS}{RT}$

$$PS = \frac{QS}{RT} \times PT$$

$$= \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c \; (\because PT = AD = c)$$

எனவே இடைநிலை $OB = OA + AB$

$$= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right) \times c}{f}$$

$$\therefore \text{இடைநிலை} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right) \times c}{f}$$

இடைநிலையின் சிறப்பியல்பு: ஓர் எண் கூட்டத்தில், இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எண் அளவை (Absolute) விலகல்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும்.

நிரூபணம் : கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் கூட்டத்தினை ஏறு வரிசையில் எடுத்துக் கொள்வோம். x என்பது ஏதாவதொரு மூலவெண்ணைக எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றுள் $a, b, c, \ldots\ldots$ என்பன x ஐ விடச் சிறியனவாகவுள்ள n_1 எண்களாகட்டும்; $k, l, m \ldots\ldots$ என்பன x ஐ விடப் பெரியனவாகவுள்ள n_2 எண்களாகட்டும். $f(x)$ ஆனது, x-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட எண் அளவை விலகல்களின் கூடுதலாகட்டும்.

$$f(x) = \sum_{n_1} (x-a) + \sum_{n_2} (k-x)$$

இது ஒரு தொடர் சார்பு (Continuous function). எனவே,

$$\frac{df}{dx} = (1+1+\ldots n_1 \text{ உறுப்புகள்}) - (1+1+\ldots n_2 \text{ உறுப்புகள்})$$

$$= n_1 - n_2$$

$n_1 = n_2$ எனில், $\frac{df}{dx} = 0$ ஆகவும்,

$n_1 < n_2$ எனில், $\frac{df}{dx}$ நேர்மறையாகவும்,

$n_1 > n_2$ எனில், $\frac{df}{dx}$ எதிர்மறையாகவும் இருக்கும்.

$n_1 = n_2$ எனில், x என்பதுதான் இடைநிலையாகும். இடைநிலைக்கு வலப் புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ ஆனது ஓர் ஏறுகின்ற சார்பாகவும், இடைநிலைக்கு இடப் புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ ஆனது ஓர் இறங்குகின்ற சார்பாகவும் அமையும். இடைநிலையில் $\frac{df}{dx} = 0$ ஆகும். எனவே இடைநிலையில் $f(x)$ மிகச் சிறியதாக அமைகின்றது. அதாவது இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எண் அளவை (Absolute) விலகல்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு **1:** 14 மாணவர்களின் உயரங்கள் (அங்குலங்களில்) வருமாறு: 60, 67, 59, 61, 72, 62, 64, 66, 63, 67, 69, 68, 65, 61. இடைநிலையைக் காண்க.

இதனை ஏறுவரிசையில், எழுத, 59, 60, 61, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 67, 68, 69, 72.

இடைநிலை 7ஆவது மாணவனின் உயரத்திற்கும்,

8ஆவது மாணவனின் உயரத்திற்கும் கூட்டுச் சராசரியாகும்.

$$\text{அதாவது } \frac{64+65}{2} = 64{\cdot}5 \text{ (அங்குலங்கள்)}$$

எடுத்துக்காட்டு **2:** கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்கான இடைநிலையைக் காண்க.

மதிப்புகள்	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
அலைவெண்	5	15	25	41	50	43	43	14	6

முதலில் கீழ்க் கண்ட பட்டியலை அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

பிரிவின் மேல் எல்லை	குவிவு அலைவெண்
20	5
30	20
40	45
50	86
	← $\frac{N}{2} = 115$
60	136
70	179
80	210
90	224
100	230

இங்கு $N = 230$. எனவே $\frac{N}{2} = 115$

இடைநிலைப் பிரிவு $= 50 - 60$ ஆகும்.

எனவே இடைநிலை $= 50 + \frac{115 - 86}{50} \times 10$

$= 50 + 5 \cdot 8$

$= 55 \cdot 8$

§ 2.5. முகடு

எந்தவொரு மாறியின் மதிப்பு மிக அதிகமான தடவைகளில் நிகழ்கின்றதோ, அம் மாறியின் மதிப்பு, அம் மாறி மதிப்புகளின் முகடாகும். அலைவுப் பரவலில் இது மிக அதிகமான அலைவெண் கொண்ட பிரிவில் அமைந்திருக்கும். இப் பிரிவிற்கு முகட்டுப் பிரிவு என்பது பெயர். முகடு எவ்வாறு கணக்கிடப்படுகிறது என்பதைப் பின்னுல் காண்போம்.

10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 42, 48, 55, 60, 60, 60, 67, 69, 74, 74 எனில் இதற்கான முகடு 60 ஆகும். ஏனெனில் 60 அதிகமான இடங்களில் நிகழ்வதைக் காணலாம். எந்த ஓர் எண்ணும் ஒரு முறைக்கு மேல் நிகழாமலிருப்பின் முகட்டைக் காண இயலாது. ஆனால் அலைவுப் பரவலில் முகட்டைக் காணலாம்.

ஓகைவ் வரையின் திருகுப் புள்ளி அல்லது வளைவு மாற்றப் புள்ளியின் x அச்சுத் தூரமே முகடாகும்.

வாணிகத் துறையில் பெருமளவில் முகடு பயன்படுகின்றது. பாமர மக்களும் இதை எளிதில் புரிந்து கொள்வர்.

காலணிகள் விற்கும் ஒரு கடைக்காரரிடம் சராசரியாக எந்த அளவுடைய காலணிகள் விற்பனையாகின்றது எனக் கேட்டால், அவர் ''8 அளவுடைய காலணிகள்'' என்கிறார் எனக் கொள்வோம். அவர் விற்பனையான எல்லாக் காலணிகளின் அளவுகளுக்கும் கூட்டுச் சராசரியைச் சொல்வதில்லை. எட்டு அளவுடைய காலணிகள் அதிகமாக விற்பனையானால் அதையே அவர் சராசரியாகக் கொள்கிறார். இது முகடாகும்.

அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் 'சராசரியாக' என்று சொன்னால் அது முகட்டையே குறிப்பது ஆகும்; கூட்டுச் சராசரியை அல்ல.

அலைவுப் பரவலுக்கான முகடு: (i) தோராய முகடு: மிகப் பெரிய அலைவெண்ணைக் கொண்ட பிரிவின் மைய மதிப்பிற்குத் தோராய முகடு என்பது பெயர். அலைவுப் பரவலுக்கான அலைவெண் வரை வரைந்தால், அதன் உச்சி, முகட்டுப் பிரிவின் மையப் புள்ளியோடு இணையாது என அறியலாம். சற்று இடப் பக்கமாகவோ அல்லது வலப் பக்கமாகவோ இது தள்ளி இருத்தல் காணலாம். எனவே தோராய முகடு சரியான முகடாகக் கொள்ளத் தக்கதன்று.

(ii) முந்தைய பிந்தைய பிரிவுகளைக் கருத்திற்கொண்டு முகட்டைக் காணல்: முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க. முகட்டுப் பிரிவின் தூரம் c என்க. f_1 என்பது முகட்டுப் பிரிவின் முந்தைய பிரிவின் அலைவெண்ணாகட்டும். f_2 என்பது முகட்டுப் பிரிவின் பிந்தைய பிரிவின் அலைவெண்ணாகட்டும். முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லையிலிருந்து முகட்டின் தூரம் x என்றால், மேல் எல்லையிலிருந்து முகட்டின் தூரம் $(c-x)$ ஆகும். எனவே,

$$f_1 x = f_2 (c-x)$$

$$\therefore (f_1 + f_2) x = c f_2$$

$$x = \frac{c f_2}{f_1+f_2}$$

முகட்டின் அளவு $= l + \dfrac{c f_2}{f_1+f_2}$.

முகட்டுப் பிரிவின் அலேவெண் இதனைப் பாதிப்பதில்லேயென அறிக.

(iii) அலேவெண்களின் வித்தியாசங்களைக் கருத்திற்கொண்டு முகடு காணல்

$$\text{முகடு} = l + \frac{(f-f_1)\,c}{2f - f_1 - f_2}$$

இங்கு, f — முகட்டுப் பிரிவின் அலேவெண்,

f_1 — முகட்டுப் பிரிவின் முந்தைய பிரிவின் அலேவெண்,

f_2 — முகட்டுப் பிரிவின் பிந்தைய பிரிவின் அலேவெண்,

c — முகட்டுப் பிரிவின் தூரம்,

l — முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லே.

(இதன் நிரூபணம் நமது பாடத் திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.)

நடைமுறைச் சூத்திரம்: கூட்டுச் சராசரி — முகடு = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலே). எல்லாப் பரவல்களுக்கும் இது பொருந்தும் எனச் சொல்ல இயலாதெனினும் ஓரளவிற்குச் சமச் சீரில்லாத பரவல்களுக்கு இது உண்மையாகும். இதனைப் பயன் படுத்தினல் பொருட்படுத்துமளவிற்குப் பிழை நேராது. ஓர் அலேவெண் பரவலில் எவையேனும் இரு சராசரிகளைக் கணக்கிட்டால் மூன்ருவதை மேற்கண்ட சூத்திரத்தின் வாயிலாக அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: கீழ்க்கண்ட அலேவுப் பரவலின் முகட்டினைக் காண்க.

மதிப்புகள்	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
அலேவெண்	5	15	25	41	50	43	31	14	6

(i) தோராய முகடு : முகட்டுப் பிரிவு $= 50-60$

இதன் மைய மதிப்பு $= 55$

எனவே முகடு $= 55$

(ii) முகடு $= l + \dfrac{c f_2}{f_1+f_2}$ என்பதனை உபயோகித்து,

l = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை $= 50$

f_1 = முகட்டுப் பிரிவின் முந்தைய பிரிவின் அலைவெண் $= 41$

f_2 = முகட்டுப் பிரிவின் பிந்தைய பிரிவின் அலைவெண் $= 43$

c = முகட்டுப் பிரிவின் தூரம் $= 10$

எனவே முகடு $= 50 + \dfrac{10 \times 43}{41+43}$

$= 50 + 5{\cdot}12$

$= 55{\cdot}12$

(iii) முகடு $= l + \dfrac{c\,(f-f_1)}{2f-f_1-f_2}$ என்ற சூத்திரத்தைக் கொண்டால் (f - முகட்டுப் பிரிவின் அலைவெண்)

முகடு $= 50 + \dfrac{10\,(50-41)}{100-41-43}$

$= 50 + 5{\cdot}625$

$= 55{\cdot}625$

(iv) நடைமுறைச் சூத்திரம் உபயோகித்தால்

கூட்டுச் சராசரி — முகடு $=$ 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை)

முதலில் இதற்கான கூட்டுச் சராசரியைக் காணலாம்.

பிரிவுத் தூரத்தின் மைய மதிப்புகள் (x_r)	அலைவெண் (f_r)	d_r	$f_r d_r$
15	5	−4	−20
25	15	−3	−45
35	25	−2	−50
45	41	−1	−41
55	50	0	0
65	43	1	43
75	31	2	62
85	14	3	52
95	6	4	24
மொத்தம் :	230		25

இங்கு $c = 10$ ஆகும். $A = 55$

எனவே $\bar{x} = A + c \dfrac{\Sigma f_r d_r}{N}$

$= 55 + \dfrac{10 \times 25}{230}$

$= 55 + 1{\cdot}087$

$= 56{\cdot}087$

கூட்டுச் சராசரி $= 56{\cdot}087$

இதற்கான இடைநிலை $= 55{\cdot}8$ என முன்பே கண்டோம்.

ஆகையால் கூட்டுச் சராசரி — முகடு = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை)

$56{\cdot}087$ — முகடு $= 3\,(56{\cdot}087 - 55{\cdot}8)$

$= 0{\cdot}861$

முகடு $= 56{\cdot}087 + 0{\cdot}861$

$= 56{\cdot}948$

இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினுல் இங்கு முகடு தவருன தாகத்தான் கிடைக்கிறது. எனவே வேறு வழியில்லாவிட்டால் மட்டுமே இதனைப் பயன்படுத்தலாம்.

சிறந்த சராசரிக்குரிய பண்புகள் : (i) நன்கு வரையறுக்கப் பட்ட தெளிவான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திச் சராசரியைக் கணக்கிடல் வேண்டும்.

(ii) பரவல் முழுவதின் தன்மைகளையும் பிரதிபலிப்பதாக இருத்தல் வேண்டும்.

(iii) அனைவருக்கும் எளிதிற் புரியும் வண்ணம் இருத்தல் வேண்டும்.

(iv) எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட எல்லா அங்கங்களையும் கருத்திற்கொண்டு கணக்கிடப்பட்டதாக இருத்தல் வேண்டும்.

(v) எளிதான முறையில் கணக்கிட ஏதுவாக இருத்தல் வேண்டும்.

(vi) கணக்கியல் வழித் துறைகளில் மேலாய்விற்கு வழி செய்யும் வகையில் இருத்தல் வேண்டும்.

(vii) நிலையானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி — நன்மை, தீமைகள் : மேற்கூறிய ஐந்தாவது பண்பைத் தவிர மற்றெல்லாப் பண்புகளையும் கொண்டிருக்கிற சராசரி கூட்டுச் சராசரியாகும். எனினும் கூட்டுச் சராசரியினைக் காண எளியதோர் வழியினைக் கண்டோமல்லவா? எனவே கூட்டுச் சராசரி எல்லாப் பண்புகளையும் கொண்டது எனலாம். இதற்கான வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரமுண்டு. இது கணக்கியல் துறையில் பெரிதும் பயன்படுகின்றது.

மற்றச் சராசரிகளினின்றும் இது மேம்பட்டது. பல குழுக்களின் தனித்தனிக் கூட்டுச் சராசரிகள் தெரிந்த நிலையில், அவையனைத் தும் இணைந்த ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரியினை எளிதாகக் கணக்கிட முடியும். எனினும் வரை படத்தின் மூலம் முகடு, இடைநிலைகளை எளிதாகக் காண்பது போன்று கூட்டுச் சராசரியினை அவ்வளவு எளிதாகக் காண இயலாது. இடைநிலையைக் காண நடு அங்கத்தின் மதிப்பு மட்டும் தெரிந்தால் போதுமானது. ஆனுல் கூட்டுச் சராசரிக்கோ எல்லா அங்கங்களின் மதிப்புகளும் தேவைப் படுகின்றது.

மேலும் மிக உயர்ந்த, தாழ்ந்த தனி அங்கங்கள், கூட்டுச் சராசரியினைப் பெரிதும் பாதிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி கைச்செலவு ரூபாய் இரண்டென்று கொள்வோம். ஒரு பணக்கார மாணவன் அவ்வகுப்பில் சேர்ந்து கைச்செலவாக ரூபாய் 920 ஐச் செலவழிக்கின்முன் எனக் கொண்டால் இப்போது அவ்வகுப்பு மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி கைச்செலவு ரூபாய் 20 ஆகின்றதல்லவா? இது அவ்வகுப்பின் சரியான சராசரி கைச்செலவு ரூபாய் ஆகாது. இந்நிலை மிக உயர்ந்த தனி மதிப்பைச் சேர்த்ததனல் விளைந்த விளைவேயாகும்.

வகுப்பு மாணவர்களை அவரவர்கள் செய்யும் கைச்செலவைப் பொருத்து ஏறு வரிசையில் நிற்க வைத்துக் கணக்கிட்டால் 26ஆவது மாணவனின் கைச்செலவு (ரூ. 2·25 எனக் கொள்வோம்) இடைநிலையாகும். இது ஒரு சரியான பிரதிபலிப்பாகும்.

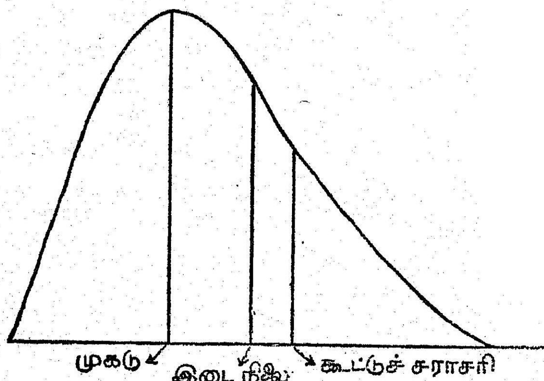
நிலையானதாக இருப்பதாலும் இன்ன பிற காரணங்களாலும் கூட்டுச் சராசரியானது எல்லாத் துறைகளிலும் வெகுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

இடைநிலை — நன்மை தீமைகள் : இடைநிலைக்கான சூத்திரம் உண்டு. இது புரிந்து கொள்வதற்குச் சுலபமானது; மிக உயர்ந்த, தாழ்ந்த தனி அங்கங்களால் பாதிக்கப்படுவதில்லை; கணக்கிடுவதற்கு எளிதாயினும் கணக்கியல் வழித்துறைகளின் மேலாய்விற்குப் பயன்படுவதில்லை. இது நிலையானதாகும். ஒரே வயதுடைய குழுவினருக்குச் சட்டை தைத்து விற்பனை செய்வோர்க்கு இடைநிலை நல்லதொரு பிரதிநிதியாகும். முகட்டைக் காட்டிலும் இது நல்லதொரு சராசரியாகும்.

முகடு — நன்மை, தீமைகள் : முகட்டிற்கெனச் சரியானதொரு சூத்திரமில்லை. வெவ்வேறு சூத்திரங்களால் பெறப்படும் முகடுகள் வெவ்வேருக இருக்கும். இதனல் கணக்கியல் வழித் துறைகளின் மேலாய்விற்குப் பயனில்லை. இனத் தொகுதியின் வெவ்வேறு பகுதிகளின் முகடுகள் வெவ்வேருனவை. அதாவது முகடு நிலையானதொரு சராசரியன்று. எந்தெந்தப் பொருள்களை, எந்தெந்த அளவிற்குச் சேமித்து வாணிகம் செய்வது என யோசிப்போர்க்கு முகடுதான் சிறந்ததோர் சராசரியாகும். வாணிகத் துறையிலும் தொழில் துறையிலும் முகடு பெரிதும் பயன்படுகின்றது.

சமச்சீர்த்தன்மை வாய்ந்த பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை முகடு ஆகிய அனைத்தும் ஒத்திருக்கும். ஓரளவிற்குச் சமச்

சீரில்லாத பரவலில், பரவல் படத்தில் காட்டியபடி விரைந்து உச்சியை அடைந்து உச்சியின் வலப் புறத்தில் சிறிது சிறிதாகக் கீழிறங்கி வந்தால் அதை 'நேர்மறைக் கோட்டம்' கொண்டது என்போம். முகடு, இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி இவை மூன்றும் ஏறு வரிசையிலிருக்கும்.



படம் 17

எதிர்மறைக் கோட்டம் கொண்ட பரவலில் வரையானது சிறிது சிறிதாக உச்சியை அடைந்து விரைவில் கீழிறங்கும். அப்பொழுது கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு என்ற வரிசைப்படி இருக்கும்.

§ 2.6. பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean)

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்ற n மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி யானது $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ பெருக்குச் சராசரி } = [x_1 x_2 \ldots\ldots x_n]^{\frac{1}{n}}$$

அலைவுப் பரவலில் n பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனவும், அப்பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots, f_n$ எனவும் கொண்டால், பெருக்குச் சராசரி$=[x_1 x_1, \ldots,$ (f_1 முறைகள்) $x_2 x_2 \ldots$ (f_2 முறைகள்) $\ldots\ldots\ldots]^{\frac{1}{N}}$

$$\text{இங்கு } N = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$
$$= \text{மொத்த அலைவெண்}$$

$$\text{பெருக்குச் சராசரி} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^{\frac{1}{N}}$$

மிகை (லாகிருதம் — Logarithm) பயன் படுத்தினல்

$$\text{மிகை (பெருக்குச் சராசரி)} = \frac{\text{மிகை } x_1 + \text{மிகை } x_2 + \dots + \text{மிகை } x_n}{n}$$

எனவும்,

அலைவுப் பரவலில்

$$\text{மிகை (பெருக்குச் சராசரி)} = \frac{f_1 \text{ மிகை } x_1 + f_2 \text{ மிகை } x_2 + \dots + f_n \text{ மிகை } x_n}{N}$$

எனவும் பெறலாம்.

n_1 அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் பெருக்குச் சராசரி G_1 ஆகவும், n_2 அங்கங்கள் கொண்ட மற்ருெரு குழுவின் பெருக்குச் சராசரி G_2 ஆகவும், இவ்விரு குழுக்களுமிணைந்த குழுவின் பெருக்குச் சராசரி G ஆகவுமிருப்பின்,

$$\text{மிகை } G = \frac{n_1 \text{ மிகை } G_1 + n_2 \text{ மிகை } G_2}{n_1 + n_2}$$

நிரூபணம் : $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பன முதல் குழுவிலுள்ள n_1 அங்கங்கள் என்க. அதன் பெருக்குச் சராசரி G_1. எனவே n_1 மிகை G_1 = மிகை x_1 + மிகை x_2 + ... + மிகை x_{n_1} $y_1, y_2 \dots y_{n_2}$ என்பன இரண்டாம் குழுவிலுள்ள n_2 அங்கங்கள் என்க. அதன் பெருக்குச் சராசரி G_2. எனவே n_2 மிகை G_2 = மிகை y_1 + மிகை y_2 + ... மிகை y_{n_2}

இவ்விரண்டையும் கூட்டி $n_1 + n_2$ ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{n_1 \text{ மிகை } G_1 + n_2 \text{ மிகை } G_2}{n_1 + n_2} =$$

$$\frac{\text{மிகை } x_1 + \text{மிகை } x_2 + \dots + \text{மிகை } x_{n_2} + \text{மிகை } y_1 + \text{மிகை } y_2 + \dots \text{ மிகை } y_{n_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \text{மிகை } G \text{ (வரையறைப்படி)}$$

பயன்கள் : குறியீட்டெண் (Index Number) களைக் காணப் பெருக்குச் சராசரி பயன்படுகின்றது; மாறிகளின் மதிப்பைவிட மாறிகளின் மதிப்பு விகிதத்தைக் காண இது நன்கு பயன்படுகின்றது. விற்பனையெண்கள் (Sales Fig.), இனத் தொகுதியெண்கள் (Population Fig.) போன்றவற்றைக் காணச் சிறந்ததொரு சாதனம் பெருக்குச் சராசரியே. இது சிறந்த சராசரிக்குரிய பண்புகளைத் தும் கொண்டது. இதைக் கணக்கிடக் கையாளப்படும் வழிகள் எளிமையானவையாகக் கருத முடியாது; சற்றுச் சிக்கலானவையே. தனி அங்கங்களில் ஏற்படுகின்ற சிறிய பிழையும் பெருக்குச் சராசரியைப் பாதிக்கும். பெருக்குச் சராசரியில் ஓர் அங்கம் பூச்சியமெனில் பெருக்குச் சராசரியே பூச்சியமாகி விடும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : கீழ்க்கண்ட நான்கு அளவுகளின் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க : 1, 2, 8, 16.

$$\text{பெருக்குச் சராசரி} = \sqrt[4]{1\times 2\times 8\times 16} = (256)^{\frac{1}{4}} = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரியினைக் கணக்கிடுக.

எடை (பவுண்டில்)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
அலைவெண்	5	15	25	41	50	43	31	14	6

பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் x_r	லாக் x_r	f_r	f_r லாக் x_r
15	1·1761	5	5·8805
25	1·3979	15	20·9685
35	1·5441	25	38·6025
45	1·6532	41	67·7812
55	1·7324	50	87·0200
65	1·8129	43	77·9547
75	1·8751	31	58·1281
85	1·9294	14	27·0116
95	1·9777	6	11·8662
		230	395·2133

லாக் (பெருக்குச் சராசரி) = 1·7183

∴ பெருக்குச் சராசரி = 52·28

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஒரு நாட்டின் ஜனத்தொகை கீழே தரப் பட்டுள்ளது. அந்நாட்டின் ஜனத்தொகைப் பெருக்கம் எவ்வளவு? 1981-ல் நாட்டின் ஜனத்தொகை எவ்வளவிருக்கும் எனக் காண்க.

ஆண்டு	ஜனத்தொகை (மில்லியன்களில்)
1931	94·63
1941	101·13
1951	105·92
1961	112·70
1971	129·60

ஜனத்தொகை விகிதம்

$$\frac{101\cdot13}{94\cdot63}, \frac{105\cdot92}{101\cdot13}, \frac{112\cdot70}{105\cdot92}, \frac{129\cdot60}{112\cdot70}$$ ஆகும்.

எனவே சராசரி ஜனத்தொகைப் பெருக்கம்

$$= \sqrt[4]{\frac{101\cdot13}{94\cdot63} \times \frac{105\cdot92}{101\cdot13} \times \frac{112\cdot70}{105\cdot92} \times \frac{129\cdot60}{112\cdot70}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{129\cdot60}{94\cdot63}} = 1\cdot081$$

சராசரி மக்கட் தொகைப் பெருக்கத்தின் சதவீதம் = 8·1

1981-ல் அந்நாட்டின் ஜனத்தொகை = 129·60 × 1·081 மில்லியன்கள்

= 140·0976 மில்லியன்கள்

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் மூன்று பொருள்களின் விலைகள் முறையே 60%, 25%, 35% அதிகமானல் சராசரி விலையேற்றச் சதவீதம் என்ன ?

$$சராசரி விலையேற்றம் = \sqrt[3]{1{\cdot}6 \times 1{\cdot}25 \times 1{\cdot}35}$$

$$= 1{\cdot}393$$

எனவே சராசரி விலையேற்றச் சதவீதம் = 39·3%

(இங்குச் சராசரி விலையேற்றச் சதவீதம் $\frac{60+25+35}{3} = 40\%$.

அல்ல என்பது நோக்கற்பாலது.)

§ 2·7. ஹார்மோனிக் அல்லது இசைச் சராசரி

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்பன n மதிப்புகளின் வரிசையெனில் $\dfrac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)}$ என்பது அவற்றின் ஹார்மோனிக் சராசரி அல்லது இசைச் சராசரியாகும்.

அலைவுப்பரவலில், அலைவெண்கள் $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ஆகவும், $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகளாகவுமிருப்பின் அப் பரவலின் ஹார்மோனிக் சராசரி $\dfrac{N}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\ldots+\frac{f_n}{x_n}}$ ஆகும். இங்கு $N=f_1+f_2+\ldots+f_n$ = மொத்த அலைவெண். பூச்சியமோ அல்லது மிகச் சிறியதான ஓர் அங்கமோ இருக்குமாயின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் ஹார்மோனிக் சராசரியும் பூச்சியமாகிவிடும். எனினும் மிகப் பெரிய மதிப்புள்ள அங்கத்தினுல் ஹார்மோனிக் சராசரி பாதிக்கப்படுவதில்லை. எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் கணக்கில் கொண்டுதான் ஹார்மோனிக் சராசரி கணிக்கப்படுகின்றது. இது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரமுடையது; ஆனுல் கணக்கிடும் முறை சற்றுக் கடினமானது.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஒருவர், தமது பிரயாணத்தில் முதல் கிலோ மீட்டரை 20 கி.மீ. வேகத்திலும், இரண்டாவது கிலோ மீட்டரை 16 கி.மீ. வேகத்திலும் மூன்றுவது கிலோ மீட்டரை 12 கி.மீ. வேகத்திலும் கடந்தால் அவரது சராசரி வேகம் என்ன ?

$$சராசரி வேகம் = \frac{3}{\frac{1}{20}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}} = 15{\cdot}32 \text{ கி.மீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : ஒருவர் முதல் தர மாம்பழங்களை ஒரு ரூபாய்க்கு மூன்று பழங்கள் எனவும், இரண்டாம் தர மாம்பழங்களை ஒரு ரூபாய்க்கு நான்கு பழங்கள் எனவும், மூன்றும் தர மாம்பழங்களை ஒரு ரூபாய்க்கு ஐந்து பழங்கள் எனவும் விற்றால் அவர் விற்ற பழங்களின் சராசரி விலை என்ன ?

$$\text{சராசரி விலை} = \frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = 3{\cdot}83$$

ஒரு ரூபாய்க்கு $3 \cdot 83$ பழங்களாகும்.

§ 2.8. நிறுத்திய கூட்டுச் சராசரி

$x_1, x_2,$, x_n என்பன n மதிப்புகள் என்க. இவற்றிற்கான எடைகள் முறையே $w_1, w_2, \ldots w_n$ எனில், இவற்றின் நிறுத்திய கூட்டுச் சராசரி $\frac{w_1 x_1+w_2 x_2+\ldots+w_n x_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}$ ஆகும்.

அலைவுப் பரவலில் $f_1, f_2, \ldots, f_n$ என்பன அலைவெண்கள் எனில் f_1 முறை x_1 நிகழ்வதாகவும், f_2 முறை x_2 நிகழ்வதாகவும்,......f_n முறை x_n நிகழ்வதாகவும் கொண்டு, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ஆகியவற்றையே எடைகளாகக் கொள்வோம்.

எனவே நிறுத்திய கூட்டுச் சராசரி $\frac{f_1 x_1+f_2 x_2+\ldots+f_n x_n}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$ ஆகும்.

நிறைய மதிப்புகள் கொண்ட குழுவில் கூட்டுச் சராசரிக்கும், நிறுத்திய கூட்டுச் சராசரிக்கும் வித்தியாசம் அதிகமிராது. குறியீட்டெண்கள் கணிப்பிற்கும் வகுப்பு மாணவர்களின் உண்மையான தரத்தினை அறியவும் மற்றும் பல வழிகளிலும் இது பெரிதும் பயன்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு : ஒரு மாணவன் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களும் பாடங்களுக்கான எடைகளும் வருமாறு :

பாடங்கள்	மதிப்பெண்கள்	எடைகள்
ஆங்கிலம்	40	2
தமிழ்	70	1
கணிதம்	31	5
விஞ்ஞானம்	30	6
வரலாறு	35	4

நிறுத்திய கூட்டுச் சராசரி காண்க.

நிறுத்திய கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{2 \times 40 + 1 \times 70 + 5 \times 31 + 6 \times 30 + 4 \times 35}{18}$$

$$= \frac{80 + 70 + 155 + 180 + 140}{18}$$

$$= \frac{625}{18} = 34{\cdot}72$$

பயிற்சி

1. 228 பேர்களின் எடைப்பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

எடை (பவுண்டில்)	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	140—150	150—160
அலைவெண்	1	11	25	37	62	31	22	15

எடை (பவுண்டில்)	160—170	170—180	180—190	190—200	200—210	210—220
அலைவெண்	9	5	4	3	2	1

2. கேள்வி 1-ல் பரவலுக்கான இடைநிலை யாது ?

3. கேள்வி 1-ல் பரவலுக்கான முகடு யாது ?

4. வீட்டில் வசிப்போரின் எண்ணிக்கை 2000 வீடுகளில் அறியப்பட்டது. அதைப் பற்றிய விவரம் வருமாறு :

ஒரு வீட்டில் வாழ்வோரின் எண்ணிக்கை	வீடுகளின் எண்ணிக்கை
1	104
2	452
3	480
4	380
5	240
6	168
7	84
8	56
9	20
10	16

இதற்கான கூட்டுச் சராசரி இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி. இதில் நடைமுறைச் சூத்திரத்தைச் சரி பார்.

5. 800 கார்ன் பயிர்களின் நீளப் பரவல் கீழே தரப் பட்டுள்ளது:

நீளம் (அங்குலத்தில்)	4·0	4·5	5·0	5·5	6·0	6·5	7·0	7·5	8·0	8·5	9·0	9·5	10·0
கார்ன்களின் எண்ணிக்கை	1	1	8	33	70	110	770	172	124	61	32	10	2

இப்பரவலின் மையப் போக்கின் அளவைகளில் மூன்றினைக் கணக்கிடுக.

6. 445 தொழிலாளர்களின் ஒரு வாரச் சம்பளம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

வாரச் சம்பளம் ரூபாயில்	அலைவெண்
15 - 16-க்குக் கீழ்	6
16 - 17-க்குக் கீழ்	15
17 - 18-க்குக் கீழ்	43
18 - 19-க்குக் கீழ்	56
19 - 20-க்குக் கீழ்	87
20 - 21-க்குக் கீழ்	111
21 - 22-க்குக் கீழ்	69
22 - 23-க்குக் கீழ்	27
23 - 24-க்குக் கீழ்	19
24 - 25-க்குக் கீழ்	12

இப்பரவலின் முகடு, இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி காண்க.

7. ஒரு நாட்டின் ஒரு பகுதியில் குழந்தைகள் நன்றாக நடக்கத் துவங்கும் வயதினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகின்றது:

வயது (மாதங்களில்)	8—8·9	9—9·9	10—10·9	11—11·9	12—12·9	13—13·9	14—14·9	15—15·9	16—16·9	17—17·9
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	1	10	22	30	62	35	28	13	7	2

இப்பரவலுக்குரிய முகடு, இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி யாவை?

8. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒரு நாட்டின் மக்கட் தொகையைக் காட்டுகின்றது. அந் நாட்டின் மக்கட் பெருக்கம் எவ்வளவு? 1980-ல் மக்கட் தொகை எவ்வளவிருக்கும் எனக் காண்க.

ஆண்டு	மக்கட்தொகை (மில்லியனில்)
1930	283·9
1940	303·4
1950	305·7
1960	338·1
1970	388·8

9. ஓர் இயந்திரத்தின் விலை கடந்த மூன்று ஆண்டுகளில் முறையே 70%, 35%, 20% அதிகமாகியது என்றுல் விலையேற்றச் சதவீதம் என்ன?

10. புள்ளியியல் பாடத்தில் ஒரு வகுப்பின் 275 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 47. அவர்களுள் 75 பேர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 59; வேறு 100 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 28 எனில், ஏனைய 100 மாணவரின் சராசரி மதிப்பெண் என்ன?

11. கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 1,248 எனில் விடுபட்ட அலைவெண்ணைக் காண்க.

பவுண்டுகள்	87	101	115	129	143	157	171	185
அலைவெண்	30	270	860	830	?	110	30	20

3. பரவுகை

§ 3.1. அறிமுகம்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் எல்லா அங்கங்களும் மையப்போக்கின் அளவினின்று பரவிச் சிதறிக் கிடக்கும். அத்தகு சிதறலுக்குப் பரவுகை என்பது பெயர். வெவ்வேறு பரவல் களில் புள்ளி விவரங்கள் வேறுபட்ட தன்மையில் சிதறி இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை ஆராய்ந்தால் ஆங்கிலத்தில் மதிப்பெண்கள் சுமார் இருபதிலிருந்து அறுபத்தைந்துக்குள் இருப்பதையும்,கணிதத்தில் பூச்சியத்திலிருந்து நூறு வரைக்கும் பரவி இருப்பதையும் காணலாம். ஆங்கிலத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களையும், கணிதத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களை யும் அலைவுப் பரவலிலிட்டு ஒப்பிட்டால், ஆங்கிலத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் காட்டிலும் கணிதத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் அதிகமாகப் பரவி இருப்பதை அறியலாம். எந்த அளவில் பரவிச் சிதறி இருக்கின்றன என அறியப் பரவுகை அளவைகள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. அவையாவன : (i) வீச்சு (Range) (ii) கால் மான விலக்கம் (Quartile Deviation) (iii) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation) (iv) திட்ட விலக்கம் அல்லது தர விலக்கம் (Standard Deviation).

§ 3.2. வீச்சு

ஒரு பரவலுக்குரிய மிகப் பெரிய, 'சிறிய மதிப்புகளின் வேறு பாடே வீச்சாகும். எடுத்துக்காட்டாக ஐம்பது மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் கணிதத்தில் ஒரு மாணவன் 100%-ம், வேறொரு மாணவன் பூச்சியமும் பெற்றதாகக் கொண்டால் இதன் வீச்சு $100-0=100\%$ ஆகும். ஆங்கிலத்தில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் மிக அதிகமாக 66%-ம், மிகக் குறைந்ததாக 22%-ம் இருப்பின், வீச்சு $66-22=44\%$ எனலாம். ஆங்கிலத்தில் மிக

அதிகமான மதிப்பெண் 66% எனவும், ஒரே ஒரு மாணவன் பூச்சியம் பெறுவதாகவும் கொண்டால் இப்பொழுது வீச்சு 66 − 0 = 66% என மாறும். இந்த ஓர் அங்கத்திஞல் வீச்சு திடீரென 44-லிருந்து 66 ஆக உயர்ந்தது. இது விரும்பத்தக்க குணமன்று. பரவலின் மிகப் பெரிய, சிறிய மதிப்புகளை மட்டும் அளந்து அவற்றின் வேறுபாட்டை வீச்சென ஓர் அளவையாகக் கணக்கிட்டால் மற்ற மதிப்புகள் எவ்வகையில் பரவி இருக்கின்றன என எவ்வாறு அறிவது? இடையிலுள்ள மதிப்புகள் வீச்சினைப் பாதிக்கமாட்டா. இது கணக்கியல் ஆய்வுகளுக்குப் பயன் படுவதில்லை. இது நிலையற்றது. இதனைச் சிறந்த பரவுகை அளவையாகக் கொள்ள முடியாது. சமவாய்ப்பு—கூறெடுத்தல் முறைகளில் ஓரளவிற்கு நம்பத் தகுந்த அளவையாக இருப்பதிஞல் வணிகப் புள்ளியியலிலும், தொழில் துறையில் தரக்கட்டுப்பாடு (Quality Control) முறைகளிலும் இது பயன்படுகின்றது.

§ 3.3: கால்மான விலக்கம்

எண் கூட்டத்தில் $\frac{N+1}{2}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பே இடை நிலையாதல் போன்று, $\frac{N+1}{4}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பு கீழ்க் கால்மானம், $\frac{3(N+1)}{4}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பு மேல் கால் மானம் ஆகும்.

ஓர் அலைவுப் பரவலில் $\frac{N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணுகக் கொண்ட மதிப்பே அப்பரவலின் கீழ்க் கால்மானம் அல்லது முதல் கால்மானம் Q_1 ஆகும். $\frac{3N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணுகக் கொண்ட மதிப்பு மேல் கால்மானம் அல்லது மூன்றும் கால்மானம் Q_3 ஆகும்.

$\frac{Q_3-Q_1}{2}$ என்பது கால்மான விலக்கமாக வரையறுக்கப்படு கின்றது. ஓகைவ் வரையில் இவ்விரு கால்மானங்களைக் கணக்கிடும் விதத்தினைக் கண்டோமல்லவா? பொதுவாக அலைவுப் பரவலி லிருந்தே கால்மான விலக்கத்தினைக் கணக்கிடுவர். மிக உயர்ந்த, தாழ்ந்த மதிப்புகளால் ஏற்படும் பாதிப்பு கால்மான விலக்கத்தி லில்லையென்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

அலைவுப் பரவலில் $\frac{N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணைக் கொண்ட பிரிவினைக் கீழ்க் கால்மானப் பிரிவு எனவும், $\frac{3N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணைக் கொண்ட பிரிவினை மேல் கால்மானப் பிரிவு எனவும் அழைக்கின்றோம்.

இடைநிலையைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரம் போன்றே கீழ்க் கால்மானம் Q_1, மேல் கால்மானம் Q_3 ஆகிய இவ்விரண்டினையும் காணச் சூத்திரம் காணலாம்.

கீழ்க் கால்மானப் பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண் m_1 என்க. கீழ்க் கால்மானப் பிரிவின் கீழ் எல்லை l_1 என்க. கீழ்க் கால் மானப் பிரிவின் அலைவெண் f_1 என்க. பிரிவின் தூரம் c என்றால்,

$$\text{கீழ்க் கால்மானம் } Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c$$

இதுபோன்றே மேல் கால்மானப் பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண் m_3 என்க. மேல் கால்மானப் பிரிவின் கீழ் எல்லை l_3 என்க. மேல் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண் f_3 என்க. பிரிவின் தூரம் c எனில்,

$$\text{மேல் கால்மானம் } Q_3 = l_3 + \frac{\frac{3N}{4} - m_3}{f_3} \times c.$$

$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்பதே அப்பரவலுக்குரிய கால்மான விலக்கமாகும்.

$$\text{அதாவது கால்மான விலக்கம் } = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} [(Q_3 - M) + (M - Q_1)]$$

என எழுதலாம்.

இடை நிலையிலிருந்து கால்மானங்களின் விலகல்களின் கூட்டுச் சராசரியே கால்மான விலக்கம் என்பதாகும்.

கால்மான விலக்கத்திற்கான பரவுகையின் எண் அளவை (Absolute Measure of Dispersion for Q.D.): இதனைப் பரவுகையின் கெழு என்றும் கூறலாம். 100 கல்லூரி மாணவர்களின் உயரங்களின் பரவலுக்கும், 100 குழந்தைகளின் உயரங்களின் பரவலுக்கும் கால்மான விலக்கம் காண்பதாகக் கொள்வோம். இவ்விரண்டிற்கும் கால்மான விலக்கம் 3" ஆக இருப்பின், உடனே இப் பரவல்கள் ஒரே அளவு பரவுகைகளைக் கொண்டவை எனக் கூறிவிட முடியுமா? கல்லூரி மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 5'6" எனில், அதற்கான கால்மான விலக்கம் 3" என்பது முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததன்று. குழந்தைகளின் சராசரி உயரம் 2'6" ஆக இருப்பின், அதற்கான கால்மான விலக்கம் 3" ஆக இருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனவே கால்மான விலக்கத்திற்கும் மையப் போக்கின் அளவைகளுக்கும் யாதோ ஒரு தொடர்பு இருத்தல் வேண்டும். மையப் போக்கின் அளவைகளில் இடை நிலையைக் கால்மான விலக்கத்தோடு தொடர்பு இருப்பதாகக் கொள்வது வழக்கம்.

$$\text{பரவுகைக் கெழு} = \frac{\text{கால்மான விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}} \text{ யென வரையறுக்கலாம்.}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2M}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \quad (\because 2M = Q_3 + Q_1 \text{ தோராயமாக})$$

எனவே,

$$\text{பரவுகைக் கெழு} = \frac{\text{மேல் கால்மானம்} - \text{கீழ்க் கால்மானம்}}{\text{மேல் கால்மானம்} + \text{கீழ்க் கால்மானம்}}$$

எடுத்துக்காட்டு 1: 25 மாணவர்கள் நில நூலில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்படுகின்றன. கால்மானத்தைக் கண்டு பிடித்து பரவுகைக் கெழுவினைக் காண்க.

20, 37, 58, 50, 66, 22, 40, 59, 50, 52, 22, 48, 62
55, 75, 24, 52, 45, 53, 82, 32, 53, 46, 59, 62.

முதலில் இவற்றை நாம் ஏறு வரிசையில் எழுதிக் கொள்ளலாம்.

20, 22, 22, 24, 32, 37, 40, 45, 46, 48, 50, 50, 52, 52, 53, 53, 55, 58, 59, 59, 62, 62, 66, 75, 82.

25 எண்கள் இருப்பதால்,

Q_1 = கீழ்க் கால்மானம் $= \frac{N+1}{4}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பு

$= \frac{25+1}{4} = \frac{26}{4} = 6\frac{1}{2}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பு

= 6 ஆவது, 7 ஆவது அங்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\therefore Q_1 = \frac{37+40}{2} = \frac{77}{2} = 38 \cdot 5$$

Q_3 = மேல் கால்மானம் $= \frac{3}{4}(N+1)$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பு

$= \frac{3}{4}(25+1) = 19\frac{1}{2}$ ஆவது அங்கத்தின் மதிப்பு

= 19 ஆவது, 20 ஆவது அங்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$Q_3 = \frac{59+59}{2} = 59.$$

$\therefore$ கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{59 - 38 \cdot 5}{2}$

$= \frac{20 \cdot 5}{2} = 10 \cdot 25$

பரவுகைக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{59 - 38 \cdot 5}{59 + 38 \cdot 5} = \frac{20 \cdot 5}{97 \cdot 5} = \cdot 2103$

எடுத்துக்காட்டு 2: கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்குக் கால் மான விலக்கத்தினையும் பரவுகைக் கெழுவினையும் கண்டுபிடி.

உயரங்கள் அங்குலங்களில்	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	மொத்தம்
அலைவெண்	4	60	23	75	114	186	212	252	218	175	149	46	18	8	1500

$Q_1 = \frac{N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட மதிப்பு (கீழ்க் கால்மானம்)

$Q_3 = \frac{3N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட மதிப்பு (மேல் கால்மானம்)

L_1 = கீழ்க் கால்மானப் பிரிவின் கீழ் எல்லை = $65 \cdot 5$

N = மொத்த அலைவெண் = 1500.

எனவே $\frac{N}{4} = \frac{1500}{4} = 375$ & $\frac{3N}{4} = 1125$.

பிரிவின் மேல் எல்லை	குவிவு அலைவெண்
61·5	4
62·5	24
63·5	47
64·5	122
65·5	236
	← Q_1 கீழ்க் கால்மானம்
66·5	422
67·5	634
68·5	886
69·5	1104
	← Q_3 மேல் கால்மானம்
70·5	1279
71·5	1428
72·5	1474
73·5	1492
74·5	1500

c = பிரிவுத் தூரம் = 1

m_1 = கீழ்க் கால்மானப் பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண் = 236

f_1 = கீழ்க் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண் = 186

m_3 = மேல் கால்மானப் பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண் = 1104

f_3 = மேல் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண் = 175

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{N}{4} - m_1\right)}{f_1} \times c$$

$$= 65 \cdot 5 + \left(\frac{375 - 236}{186}\right) 1$$

$$= 65 \cdot 5 + \cdot 747$$

$$= 66 \cdot 247 \quad = 66 \cdot 25$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m_3\right)}{f_3} \times c$$

$$= 69 \cdot 5 + \left(\frac{1125 - 1104}{175}\right) \times 1$$

$$= 69 \cdot 5 + \cdot 12$$

$$= 69 \cdot 62$$

எனவே கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{69 \cdot 62 - 66 \cdot 25}{2}$

$$= \frac{3 \cdot 37}{2} = 1 \cdot 685$$

பரவுகைக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{69 \cdot 62 - 66 \cdot 25}{69 \cdot 62 + 66 \cdot 25}$$

$$= \frac{3 \cdot 37}{135 \cdot 87} = \cdot 02479$$

§ 3.4. கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

(இதனை மையப் போக்கின் அளவை விலக்கம் என்றும் கூட்டுச் சராசரியின் மாற்றம் என்றும் குறிப்பிடுவர்.) ஏதாவதொரு சராசரியிலிருந்து தனி அங்கங்களின் எண் அளவை விலகல்களின் கூட்டுச் சராசரியே கூட்டுச் சராசரி விலக்கமாகும். பொதுவாகக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து தனி அங்கங்களின் விலகல்களைக்

காண்கிறோம். சில சமயங்களில் இடை நிலையிலிருந்தும் தனி அங்கங்களின் விலகல்களைக் காணலாம். எண் அளவையாக எடுக்காமற் போனால் விலகல்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகி விடும். எனவே விலகல்களை எண் அளவை விலகல்களாகக் கொள்கிறோம்.

எண் கூட்டங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் காண,

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\Sigma \mid x_r - \bar{x} \mid}{n}$ என்பதனைச் சூத்திரமாகக் கொள்ளலாம்.

இங்கு $\bar{x}$ என்பது அவ்வெண் கூட்டத்தின் கூட்டுச் சராசரி (அல்லது இடைநிலை) யாகும்.

அலைவுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid}{N}$ ஆகும்.

இது நிலையானதாகும். இதைக் கணக்கிடக் கையாளும் வழி முறைகள் எளிதானவை எனச் சொல்ல முடியாது. அலைவுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் காண்பது கடினமேயாதலின், இது புள்ளியியலில் வெகுவாகப் பயன்படுவதில்லை; பொருளாதாரப் புள்ளியியலில் சில இடங்களில் மட்டும் பயன்படுகின்றது.

$$\text{பரவுகைக் கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} \quad \text{(அல்லது)}$$

$$= \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடை நிலை}}$$ என

வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு **1**: கூட்டுச் சராசரியினைப் பொருத்தும், இடை நிலையைப் பொருத்தும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினைக் காண்க. 10 கன்றுகளின் எடைகள் தரப்பட்டுள்ளன. **35, 40, 36, 42, 38, 42, 38, 44, 45, 39.**

முதலில் ஏறு வரிசையில் எழுதிக் கொள்வோம்.

35, 36, 38, 38, 39, 40, 42, 42, 44, 45

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \frac{35+36+38+38+39+40+42+42+44+45}{10}$$

$$= 39\cdot9$$

இடைநிலை $= \frac{10+1}{2}$ ஆவது கன்றின் எடை

= 10ஆவது, 11ஆவது கன்றுகளின் எடைகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{39+40}{2} = 39\cdot5$$

கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்து,

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் =

$$\frac{4\cdot9+3\cdot9+1\cdot9+1\cdot9+\cdot9+\cdot1+2\cdot1+2\cdot1+4\cdot1+5\cdot1}{10}$$

$$= \frac{27}{10} = 2\cdot7$$

இடைநிலையைப் பொருத்து, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{4\cdot5+3\cdot5+1\cdot5+1\cdot5+\cdot5+\cdot5+2\cdot5+2\cdot5+4\cdot5+5\cdot5}{10}$$

$$= \frac{27}{10} = 2.7$$

குறிப்பு : இங்குக் கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்தும், இடைநிலையைப் பொருத்தும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கங்கள் சமமானவைகளாக இருக்கின்றன. பொதுவாக இவ்வாறு இருப்பதில்லை.

கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் இரண்டும் கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடும் முறைகளை விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : கீழ்க்கண்ட பட்டியல், விபத்துகளின் எண்ணிக்கையையும், விபத்தில் சிக்கியோரின் எண்ணிக்கையையும் தருகின்றது. இதற்கான கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் யாது?

விபத்துகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
விபத்தில் சிக்கியோரின் எண்ணிக்கை	15	16	21	10	17	8	4	2	1	2	2	0	2

இதற்கான இடைநிலை 2 என அறிவது எளிதே.

விபத்துகளின் எண்ணிக்கை (m)	விபத்தில் சிக்கியோரின் எண்ணிக்கை (f)	விலகல்கள் இடைநிலையிலிருந்து (dm)	மொத்த விலகல் (fdm)
0	15	2	30
1	16	1	16
2	21	0	0
3	10	1	10
4	17	2	34
5	8	3	24
6	4	4	16
7	2	5	10
8	1	6	6
9	2	7	14
10	2	8	16
11	0	9	0
12	2	10	20

$N = 100; \quad \Sigma fdm = 196.$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \frac{\Sigma fdm}{N} = \frac{196}{100} = 1{\cdot}96$ விபத்துகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3: கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவுப் பரவலுக்கான கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

பிரிவுத்தூரங்கள்	1—3	3—5	5—7	7—9	9—11	11—13	13—15	15—17
அலைவெண்	6	53	85	56	21	26	4	4

இந்தப் பரவலுக்கான இடைநிலை 6·5 என்பது தெளிவு.

பிரிவுத் தூரங்கள்	மைய மதிப்புகள்	இடைநிலையிலிருந்து விலகல்கள் (*dm*)	அலைவெண் *f*	விலகல் × அலைவெண் (*f dm*)
1—3	2	4·5	6	27·0
3—5	4	2·5	53	132·5
5—7	6	·5	85	42·5
7—9	8	1·5	56	84·0
9—11	10	3·5	21	73·5
11—13	12	5·5	16	88·0
13—15	14	7·5	4	30·0
15—17	16	9·5	4	38·0
			245	515·5

$$\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{\Sigma f\,dm}{N} = \frac{515\cdot 5}{245} = 2\cdot 1$$

§ 3.5. திட்ட விலக்கம்

புள்ளி விவரங்கள் எந்த அளவில் பரவிச் சிதறிக் கிடக்கின்றன என அறிய முற்படும் பொழுது ஏதாவதொரு சராசரியிலிருந்து தனி அங்கங்களின் விலகல்கள் காண்கிறோம். அவற்றுள் சில நேர் மறையாகவும், பிற எதிர்மறையாகவும் இருக்கும். இவற்றை எண் அளவையாக எடுக்காமற் போனால் விலகல்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகிவிடும். இதனைத் தவிர்க்க எல்லா விலகல்களையும் நேர்மறையாகக் கொண்டு (அதாவது எண் அளவையாக) கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடுகின்றோம்.

விலகல்களை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டி மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்து, அதனை வர்க்க மூலப் படுத்திப் பெறப்படுவது மற்றொரு முறையாகும்.

எனவே கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைக் கண்டு வர்க்கப் படுத்தி அவற்றின் கூட்டுத் தொகையை மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்து வர்க்க மூலம் கண்டால் அதனைத் திட்ட விலக்கம் எனக்

கூறுகின்றோம். அதையே வர்க்க மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம் எனவும் கூறுவர். பொதுவாக, வர்க்க மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கத்தை s எனக் கொண்டு, யாதானுமொரு மூலப்புள்ளி A-யிலிருந்து விலகல்களிலிருந்து s ஐக் கணக்கிட்டால்,

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma (x_r - A)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma d_r^2}{n}}$$

இங்கு $d_r = x_r - A$. இது எண் கூட்டத்திற்கானதாகும்.

அலைவுப் பரவலில், $s = \sqrt{\frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f_r d_r^2}{N}}$ ஆகும்.

கூட்டுச் சராசரியை மூலப்புள்ளியெனக் கொண்டால் நாம் திட்ட விலக்கம் பெறலாம். எப்பொழுதும் திட்ட விலக்கத்தை σ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

எண் கூட்டத்திற்கான திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_r - \bar{x})^2}{n}}$

அலைவுப் பரவலுக்கான திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2}{N}}$

திட்ட விலக்கத்தின் பண்புகள் : (i) A என்பது யாதானு மொரு மூலப்புள்ளி என்க. $\bar{x}$ என்பது பரவலின் கூட்டுச் சராசரி என்க.

$x_r - A = (x_r - \bar{x}) + (\bar{x} - A)$ என எழுதலாம்.

இங்கு $x_r - \bar{x} = l_r$ எனவும்,

$\bar{x} - A = d$ எனவும் கொள்க.

எனவே $x_r - A = l_r + d$ ஆகும்.

வர்க்கப் படுத்தினுல் $(x_r - A)^2 = (l_r + d)^2$

$$= l_r^2 + 2d.\, l_r + d^2.$$

இரு பக்கங்களையும் f_r ஆல் பெருக்கி எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல்களையும் கணக்கிற் கொண்டால்,

$$\Sigma f_r (x_r - A)^2 = \Sigma f_r l_r^2 + 2d \Sigma f_r l_r + d^2 \Sigma f_r$$

$\Sigma f_r (= N)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{N} = \frac{\Sigma f_r l_r^2}{N} + 2d \frac{\Sigma f_r l_r}{N} + d^2$$

வலப்பக்கத்தின் முதல் உறுப்பு σ^2 ஆகும். கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புப்படி இரண்டாம் உறுப்பு பூச்சியமாகும். இடப்பக்கம் s^2 ஆகும்.

எனவே, $s^2 = \sigma^2 + d^2$.

இது திட்ட விலக்கத்திற்கும் வர்க்க மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கத்திற்குமுள்ள தொடர்பினைக் காட்டுகின்றது. $\sigma^2 = s^2 - d^2$ ஆதலின் திட்ட விலக்கம் தான் மற்றைய வர்க்க விலக்கங்களை விடச் சிறியது என்பதை அறியலாம். s-ன் மிகக் குறைந்த மதிப்பு σ எனவும் அறியலாம்.

(ii) எப்பொழுதும் திட்ட விலக்கமானது, கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தை விட அதிகமானது. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து x_r-ன் விலகல் l_r எனில்,

$$\frac{\Sigma l_r^2}{n} > \frac{\Sigma l_r}{N} \times \frac{\Sigma l_r}{N}$$ (இயற் கணிதத்தில் படித்திருப்பீர்கள்.)

$$> \left(\frac{\Sigma l_r}{n}\right)^2$$

எனவே, எண் கூட்டத்திற்கு

$\sigma^2 >$ (கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்)^2

எனவே, திட்ட விலக்கம் $>$ கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் என்பதாகும்.

(iii) சமச்சீராக அல்லது ஏறத்தாழச் சமச்சீராக அமைந்த ஒரு பரவலில் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}$ திட்ட விலக்கம்.

கால்மான விலக்கம் $= \frac{2}{3}$ திட்ட விலக்கம் ஆகும்.

இவை கணக்கியல் வாயிலாக அல்லது நடைமுறையில் கண்ட சூத்திரங்களாகும்.

(iv) n_1 அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$ என்க. அதன் திட்ட விலக்கம் σ_1 என்க. n_2 அங்கங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$ என்க. அதன் திட்ட விலக்கம் σ_2 என்க. இவ்விரு குழுக்களுமிணைந்த குழுவின் திட்ட விலக்கம் σ எனில்,

$N\sigma^2 = n_1\sigma_1{}^2 + n_2\sigma_2{}^2 + n_1d_1{}^2 + n_2d_2{}^2$. இங்கு $N = n_1 + n_2$. $d_1 = \bar{x}_1 - x$; $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$; $\bar{x}$ = இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி.

நிரூபணம் : வரையறைப்படி $N\sigma^2 = \sum_1^N (x_r - \bar{x})^2$. இதை இரண்டு கூடுதல்களாகப் பிரிக்கலாம். முதல் கூடுதல் முதல் குழுவின் n_1 அங்கங்களுக்கும், மற்ற கூடுதல் இரண்டாவது குழுவின் n_2 அங்கங்களுக்கும் ஆனது. முதல் கூடுதல் $n_1 s_1{}^2$ ஆகும். இங்கு s_1 என்பது $\bar{x}$ ஐப் பொருத்து வர்க்க மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கமாகும்.

எனவே $n_1 s_1{}^2 = n_1(\sigma_1{}^2 + d_1{}^2)$

இதே போன்று $n_2 s_2{}^2 = n_2(\sigma_2{}^2 + d_2{}^2)$

இவ்விரண்டையும் கூட்ட,

$$N\sigma^2 = n_1 s_1{}^2 + n_2 s_2{}^2$$

$$= n_1(\sigma_1{}^2 + d_1{}^2) + n_2(\sigma_2{}^2 + d_2{}^2)$$

$$N\sigma^2 = n_1\sigma_1{}^2 + n_2\sigma_2{}^2 + n_1d_1{}^2 + n_2d_2{}^2 \quad \dots (1)$$

இம்மாதிரியே மூன்று குழுக்களிலிருந்தால்

$$N\sigma^2 = n_1(\sigma_1{}^2 + d_1{}^2) + n_2(\sigma_2{}^2 + d_2{}^2) + n_3(\sigma^2{}_3 + d_3{}^2)$$

இங்கு $N = n_1 + n_2 + n_3$

எனவே இதை இரண்டிற்கு மேற்பட்ட குழுக்களுக்கும் விரிவு படுத்தலாம்.

(v) $N\sigma^2 = n_1\sigma_1{}^2 + n_2\sigma_2{}^2 + \frac{n_1 n_2}{N}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2.$

நிருபணம்: $n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 = n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2$

$$= n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}(n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2) + (n_1 + n_2)\bar{x}^2.$$

$$= n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2 - \frac{2(n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2} + \frac{(n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2) - (n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2)^2}{(n_1 + n_2)}$$

$$= \frac{n_1 n_2 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_1 \bar{x}_2)}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{n_1 n_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{N}$$

எனவே $N\sigma^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + \dfrac{n_1 n_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{N}$

(*vi*) $d = x_r - A$ எனக் கொண்டு, c என்பது பிரிவுத் தூரம் என்க.

$$d = \bar{x} - A = \frac{c. \Sigma f_r d_r}{N} \ldots (1)$$

இவற்றைப் பயன்படுத்தினல்,

$$s^2 = \frac{c^2 \Sigma f_r d_r^2}{N} \ldots (2)$$

$\sigma^2 = s^2 - d$ என நாம் அறிவோம் ... (3)

(1), (2), (3) ஆகியவற்றினின்று

$\sigma = c \times \sqrt{\dfrac{\Sigma f_r d_r^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma f_r d_r}{N}\right)^2}$ எனப் பெறலாம்.

இங்கு $d_r = x_r - A$. இது திட்ட விலக்கத்தினைக் காண முக்கியமானதொரு சூத்திரமாகும்.

ஷெப்பர்டின் திருத்தம்: கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காணும்பொழுது ஓர் அலைவுப் பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள அங்கங்கள் யாவும், மையப் புள்ளி எந்த அலைவெண்ணைக் கொண்டுள்ளதோ அதே அலைவெண்ணைக் கொண்டிருப்பதாக அனுமானித்துக் கொள்கின்றோம். இந்த அனுமானத்தால் சிறு பிழைகள் ஏற்படுவதுண்டு. கூட்டுச் சராசரி மேலும் கீழும் அங்கங்கள் பரவிக் கிடப்பதால், இப்பிழைகள் ஒன்றுக்கொன்று சரி செய்து கொண்டு, மொத்த நிலையில் குறிப்பிடத்தக்க பிழையின்றிப் போய்விடுகிறது. ஆனால் திட்ட விலக்கம் கணிக்கையில் அவ்வாறில்லை. இங்கு நாம் அங்கங்களின் வர்க்கங்களை எடுத்துக்கொள்கிறோம். எனவே சிறு பிழைகள் மிகையாகி மொத்த நிலையில் தவறான திட்ட விலக்கம் பெற வாய்ப்பாகி விடுகின்றது. ஷெப்பர்ட் என்பவர் இப்பிழை $\frac{c^2}{12}$ எனக் கண்டுபிடித்து,

''கணக்கிடப்பட்ட σ^2-லிருந்து $\frac{c^2}{12}$ ஐக் கழிக்க வேண்டும்'' என்றார்.

எனவே σ^2 [திருத்தப்பட்டது (அ$_2$) சரியானது] $=$ σ^2 (கண்டுபிடிக்கப்பட்டது) $- \frac{c^2}{12}$. மொத்த அலைவெண் 1000-க்கு அதிகமான நிலையிலும், அல்லது 20-க்கு மேற்பட்ட பிரிவுகள் அமைந்த அலைவுப் பரவலிலும், மேலும் மணி வடிவ அல்லது சிறிய நிலைகளில் அசம நிலையுடைய சமச்சீர்ப் பரவலிலும் இந்தப் பிழைத் திருத்தத்தினை மேற்கொள்வது நன்று.

எடுத்துக்காட்டு 1: 10 கன்றுகளின் எடைகள் பவுண்டுகளில் வருமாறு: 35, 36, 38, 38, 39, 40, 42, 42, 44, 45. இதன் திட்ட விலக்கம் என்ன?

முதல் முறை: யாதானுமொரு மூலப் புள்ளியைப் பூச்சியமெனக் கொண்டால்,

$$s^2 = \frac{35^2+36^2+38^2+38^2+39^2+40^2+42^2+42^2+44^2+45^2}{10}$$

$$= \frac{16019}{10} = 1601 \cdot 9$$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 39 \cdot 9$

இங்கு $d = \bar{x} - A$

$= 39 \cdot 9 - 0 = 39 \cdot 9$

எனவே $\sigma^2 = s^2 - d^2$

$= 1601 \cdot 9 - 1592 \cdot 01$

$= 9 \cdot 89.$

$$\sigma = \sqrt{9 \cdot 89} = 3 \cdot 146$$

இரண்டாம் முறை : கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் அதிகமாக இருப்பின், திட்ட விலக்கம் மேற்கண்ட முறையில் காண்பது எளிதன்று; சற்றுக் கடினமே. எனவே எளிதாகக் கணக்கிட, மூலப் புள்ளியைக் கூட்டுச் சராசரிக்கு மிக அருகில் முழு எண்ணாகக் கொள்வது முறை.

இங்கு மூலப் புள்ளி 40 எனக் கொண்டால்,

$$s^2 = \frac{5^2+4^2+2^2+2^2+1^2+0^2+2^2+2^2+4^2+5^2}{10}$$

$$= \frac{99}{10} = 9 \cdot 9$$

$$d = \bar{x} - A = 39 \cdot 9 - 40 = -\cdot 1$$

$$\sigma^2 = s^2 - d^2$$

$$= (9 \cdot 9) - (-0 \cdot 1)^2$$

$$= 9 \cdot 9 - \cdot 01 = 9 \cdot 89$$

$$\sigma = \sqrt{9 \cdot 89} = 3 \cdot 146$$

எவ்வழியில் கணக்கிடினும் திட்ட விலக்கம் ஒன்றேயாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2; கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஓர் அலைவுப் பரவலைக் குறிக்கின்றது. இதற்குரிய திட்ட விலக்கம் என்ன ? மாறு விகிதக்

கெழுவினைக் காண்க. ஷெப்பர்டின் திருத்தம் செய்து திருத்தப் பட்ட திட்ட விலக்கம் காண்க.

பிரிவுகள் (மி. மீட்டரில்)	அலைவெண்
20—24	43
25—29	82
30—34	129
35—39	147
40—44	122
45—49	68
50—54	44
55—59	15
மொத்தம்	650

பிரிவுத் தூரங்களின் மைய மதிப்புகள்	அலைவெண் f_r	d_r பிரிவு அலகுகளில்	$f_r \cdot d_r$	$f_r \cdot d_r^2$
22	43	−3	−129	387
27	82	−2	−164	328
32	129	−1	−129	129
37	147	0	0	0
42	122	1	122	122
47	68	2	136	272
52	44	3	132	396
57	15	4	60	240
மொத்தம்	650		28	1874

முதல் முறை : மூலப்புள்ளி 37 எனக் கொள்க.

$$c = \text{பிரிவுகளின் தூரம்} = 5$$

$$\bar{x} = 37 + \frac{28 \times 5}{650}$$

$$= 37 + \cdot 2154$$

$$= 37 + \cdot 22$$

$$= 37 \cdot 22$$

$$d = \bar{x} - A$$

$$= 37 \cdot 22 - 37 = \cdot 22$$

$$s^2 = \frac{1874 \times 5^2}{650}$$ [d_r பிரிவு அலகுகளிலிருப்பதால் இங்கு 5^2ஆல் பெருக்குகின்றோம்.]

எனவே $\sigma^2 = \dfrac{1874 \times 25}{650} - (\cdot 22)^2$

$$= 71 \cdot 57 - 0 \cdot 484$$

$$= 71 \cdot 52$$

$$\sigma = 8 \cdot 457$$

$$= 8 \cdot 46$$

இரண்டாம் முறை : முழுவதுமாகப் பிரிவு அலகுகளில் கணக்கினைச் செய்யலாம்.

$$d = \frac{28}{650}; \qquad s^2 = \frac{1874}{650}$$

$$\sigma^2 = \frac{1874}{650} - \left(\frac{28}{650}\right)$$

$$= 2 \cdot 882 - \cdot 0019$$

$$= 2 \cdot 8801$$

σ^2 (மெய் அலகுகளில்) $= 2\cdot8801\times25$

$= 72\cdot0025$

$\sigma = 8\cdot484$

$= 8\cdot48$

மூன்றும் முறை: கடைசியில் கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தினுல் கணக்கு எளிதாகும்.

$$\sigma = 5\times\sqrt{\frac{1875}{650}-\left(\frac{28}{650}\right)^2}$$

$= 8\cdot48$

மாறு விகிதக் கெழு $= \dfrac{8\cdot48\times100}{37\cdot22}$ $\left(\text{அதாவது } \dfrac{\sigma}{\bar{x}}\times100\right)$

$= 22\cdot79$

ஷெப்பர்டின் திருத்தம்: σ^2 (திருத்தப்பட்டது) $= \sigma^2$ (கண்டு பிடிக்கப்பட்டது) $- \dfrac{c^2}{12}$

$$= 72\cdot0025 - \frac{25}{12}$$

$$= 72\cdot0025 - 2\cdot083$$

$$= 69\cdot9195$$

$$\therefore \quad \sigma = 8\cdot362$$

எடுத்துக்காட்டு 3: முதல் n இயல் எண்களின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் என்ன?

மூலப் புள்ளியைப் பூச்சியமெனக் கொண்டால்,

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \dfrac{n(n+1)}{2n} = \dfrac{n+1}{2}$

$$s^2 = \frac{1^2+2^2+\ldots\ldots\ldots+n^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{6}$$

இங்கு $d = \bar{x} - A$

$$= \frac{n+1}{2} - 0$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

எனவே $\sigma^2 = s^2 - d^2$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

$$= \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12}$$

$$= \frac{n^2 - 1}{12}$$

ஆகவே திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$

எடுத்துக்காட்டு 4 : உடற்பயிற்சியாளர்களின் மார்பளவு எடுக்கப்பட்டது.

முதற்குழு (12 உடற்பயிற்சியாளர்கள்)

மார்பளவுகளின் கூட்டுச் சராசரி = 38"

திட்ட விலக்கம் = 2·1"

இரண்டாம் குழு (15 உடற்பயிற்சியாளர்கள்)

மார்பளவுகளின் கூட்டுச் சராசரி = 37·5"

திட்டவிலக்கம் = 1·9"

இவ்விரு குழுக்களுமிணைந்த உடற்பயிற்சியாளர்களின் மார்பளவுகளின் கூட்டுச் சராசரியினையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க.

இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{12 \times 38 + 15 \times 37 \cdot 5}{27}$$

$$= 37 \cdot 72$$

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$$

$$= 38 - 37 \cdot 72$$

$$= \cdot 28$$

$$\sigma_1 = 2 \cdot 1$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$$

$$= 37 \cdot 5 - 37 \cdot 72$$

$$= - \cdot 22$$

$$\sigma_2 = 1 \cdot 9$$

$$(n_1 + n_2)\ \sigma^2 = n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2)$$

என்ற சூத்திரத்தில் வைக்க,

$$27\ \sigma^2 = 12\ [(2 \cdot 1)^2 + (\cdot 28)^2] + 15\ [(1 \cdot 9)^2 + (- \cdot 22)^2]$$

$$= 12\ [4 \cdot 41 + 0 \cdot 0784] + 15\ [3 \cdot 61 + 0 \cdot 0484]$$

$$= 12\ [4 \cdot 4884] + 15\ [3 \cdot 6584]$$

$$27\ \sigma^2 = 108 \cdot 7368$$

$$\sigma^2 = \frac{108 \cdot 7368}{27}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{108 \cdot 7368}{27}} = 2 \cdot 006''$$

§ 3.6. பரவுகை இணை அளவைகள் ; மாறு விகிதக் கெழு

ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் உயரங்களைக் குறிக்கும் பரவல் ஒன்றையும் அம்மாணவர்கள் வருடாந்திரத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் குறிக்கும் பரவல் ஒன்றையும் எடுத்துக்கொண்டு ஒப்பிடுவோம். இப் பரவல்கள் வெவ்வேறு மூல அளவைகள் கொண்டவை. முதல் பரவலில் பரவுகை அளவை அங்குலம்; இரண்டாம் பரவலில் பரவுகை அளவை மதிப்பெண்கள் ஆகும். இவ்வாறு வெவ்வேறு மூல அளவைகளைக் கொண்ட பரவல்களை அப்படியே ஒப்பு நோக்க இயலாது. எனவே பரவுகை அளவைகளை, அப் பரவல்களின் சராசரிகளால் வகுத்தால் அளவை எண் வடிவத்தில் கிடைக்கும். இந் நிலையில் ஒப்பிட்டு நோக்க வழியுண்டு. இதனைப் பரவுகைக் கெழு என்கிறோம். இது $\frac{\text{பரவுகை அளவை}}{\text{சராசரி}}$ ஆகும்.

மேற்கண்ட பலதரப்பட்ட விலக்கங்களைப் (கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம், திட்ட விலக்கம்) பொருத்து பரவுகைக் கெழுவினைக் காணலாம். இவற்றுள் $\frac{(\text{திட்ட விலக்கம்})}{(\text{கூட்டுச் சராசரி})}$ ஆனது மிகச் சிறப்பானதாகும். இதனை மாறு விகிதக் கெழு என்கிறோம். இது பரவலில் மதிப்புகளின் நிலைப்புத் தன்மையை அளவிடப் பெரிதும் பயன்படும். இதனைச் சதவீதத்தில் குறிப்பிடுவது மரபாகும். இது $\frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} \times 100$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : *A*, *B* என்ற இரு கிரிக்கெட் வீரர்கள், கிரிக்கெட் பந்தயங்களில் பங்கெடுத்தனர். விவரம் வருமாறு :

***A* கிரிக்கெட் வீரர் :**

பந்தயங்களில் எடுத்த சராசரி ஓட்டங்கள் (ரன்கள்) = 58

திட்ட விலக்கம் = 22

***B* கிரிக்கெட் வீரர் :**

பந்தயங்களில் எடுத்த சராசரி ஓட்டங்கள் (ரன்கள்) = 48

திட்ட விலக்கம் = 6

இவ்விருவரில் யார் திறமைசாலி, யார் நிலைப்புத் தன்மையுடையவர் எனக் காண்க.

பந்தயங்களில் எடுத்த சராசரி ஓட்டங்கள் அவர்களது திறமை யைக் காட்டுகின்றன. எனவே A, Bஐ விடத் திறமைசாலியாவார். நிலைப்புத் தன்மையை ஒப்பிட நாம் மாறு விகிதக் கெழுக்களைக் காண வேண்டும்.

$$A\text{-க்கு மாறு விகிதக் கெழு} = \frac{22 \times 100}{58} = 37{\cdot}93$$

$$B\text{-க்கு மாறு விகிதக் கெழு} = \frac{6 \times 100}{48} = 12{\cdot}5$$

B ஐக் காட்டிலும் A-க்கு மாறு விகிதக் கெழு அதிகமாக இருப் பதால், B ஐக் காட்டிலும் A-க்கு நிலைப்புத் தன்மை குறைவு.

முடிவு : Bஐக் காட்டிலும் A திறமைசாலி;

Bஐக் காட்டிலும் A-க்கு நிலைப்புத் தன்மை குறைவு.

§ 3·7. பல்வேறு பரவுகை அளவைகளின் பயன்கள்

வீச்சின் பயன்கள் எல்லைக்குட்பட்டவை. மிக அதிகமான, குறைந்த மதிப்புகள் வீச்சினை மிகவும் பாதிக்கும். இடைப்பட்ட மதிப்புகளால் வீச்சு பாதிக்கப்படுவதில்லை. தரக் கட்டுப்பாடு முறைகளில் இது பயன்படுகின்றது என நாம் அறிவோம்.

கால்மான விலக்கம் காண்பதெளிது. அதற்கான சுலபமான சூத்திரம் உண்டு. கால்மான விலக்கம் = $\frac{2}{3}$ (திட்ட விலக்கம்). இதனின்று கால்மான விலக்கம் கணிக்கலாம். கணிசமான அளவில் இது பயன்படுகின்றது எனச் சொல்ல இயலாது.

கணக்கியல் வழி முறைகளுக்கு அவ்வள்வாக உட்படாவிடினும் கூட்டுச் சராசரி = $\frac{4}{5}$ (திட்ட விலக்கம்) என்ற சூத்திரம் உடையது. கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் பொருளாதாரப் புள்ளியியலில் சில இடங்களில் பயன்படுகின்றது. இது திட்ட விலக்கத்தினைப் போன்று உறுதியான நிலையுள்ளதாகச் சொல்ல இயலாது.

கணக்கிடும் முறை சற்றுக் கடினம் என்பதைத் தவிர மற் றெல்லா வகைகளிலும் சிறந்த பரவுகை அளவை திட்ட விலக்கமே யாகும். இது மிகவும் நிலையான தன்மை வாய்ந்தது; பரவலில் எல்லா அங்கங்களையும் அனுசரித்துக் கணிக்கப்படுகின்றது. மிகப் பெரிய, சிறிய மதிப்புகள் இதை அவ்வளவாகப் பாதிப்பதில்லை.

புள்ளியியல் ஆய்வுகளிலும், கணக்கியல் ஆய்வுகளிலும் இது மிகவும் பயன்படுகின்றது. சமச் சீர்த்தன்மையையும், தட்டைத் தன்மையையும் காண இது பயன்படுகின்றது. மற்ற எல்லாப் பரவுகை அளவைகளிலும் திட்ட விலக்கமே அதிகமாகப் பயன்படு கின்றது.

பரவுகைக் கெழுக்களில் மாறு விகிதக் கெழுவே முக்கியமான தும், பயன்படுவதுமாகும்.

மற்றெல்லாப் பண்புகளிலும் திட்ட விலக்கத்திற்கான சிறந்த பண்பு ஒன்று உண்டு. ஏறக்குறைய எல்லா அலைவுப் பரவல்களுக் கும், அலைவெண் வரை மணி வடிவத்தில்தானிருக்கும்; தோராய மாக இயல்நிலை வரையை ஒத்திருக்கும். வரை முழுமையாகச் சமச் சீராக இல்லாவிடினும் கீழ்க்கண்டவை உண்மை (யென அறிக.)

$\bar{x}$-க்கு இரு பக்கங்களிலும் வீச்சு		அங்கங்களின் சதவீதம்
$-\infty$ லிருந்து	-3σ வரை	0·1
-3σ விலிருந்து	-2σ வரை	2·2
-2σ விலிருந்து	$-\sigma$ வரை	13·6
$-\sigma$ -லிருந்து	0 வரை	34·1
0 -லிருந்து	$+\sigma$ வரை	34·1
$+\sigma$ -லிருந்து	$+2\sigma$ வரை	13·6
$+2\sigma$ -லிருந்து	$+3\sigma$ வரை	2·2
$+3\sigma$ -லிருந்து	$+\infty$ வரை	0·1

அதாவது கூட்டுச் சராசரிக்கு இரு பக்கங்களிலும் σ வீச்சில் அலைவெண்ணில் 68% இருக்கும்: 2σ வீச்சில் 95%-ம், 3σ வீச்சில் 99·7%-ம் இருக்கும். எனவே கூட்டுச் சராசரிக்கு இரு பக்கங்களி லும் 3σ வீச்சில் அலைவெண்ணில் அநேகமாக அனைத்தும் உள்ளன என்பது குறிப்பிடத் தக்கது. இப்பண்பு எடுகோள் சோதனையில் பயன்படுகின்றது.

இரு பரவல்களின் பரவுகை அளவைகளை ஒப்பிடும்பொழுது, இரண்டிற்கும் ஒரே பரவுகை அளவையினைக் காண வேண்டும். ஒன்றிற்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினையும், மற்றதற்குத் திட்ட விலக்கத்தினையும் ஒப்பிடக்கூடாது. இரண்டு பரவல்களுக்கும் ஒரே அளவினைக் காணுதல் மிக அவசியம் என உணர்க.

பயிற்சி

1. 21 ஆட்களின் வாரச் சம்பளம் (ரூபாயில்) வருமாறு:
62, 100, 88, 75, 74, 90, 72, 80, 75, 65,
52, 92, 66, 77, 81, 83, 95, 87, 89, 91:
கால்மான விலக்கம் என்ன ?

2. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கான கால்மான விலக்கம் காண்க.

x	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	4	8	11	15	12	6	3

3. 10 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. 68, 49, 32, 21, 54, 38, 41, 66, 59, 70. கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்தும், இடைநிலையைப் பொருத்தும், கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினைக் காண்க.

4. ஒரு நகரின் குறிப்பிட்ட பகுதியில், விபத்துக்களில் சிக்கிய ஆட்களைப் பற்றிய விவரம் சேகரிக்கப்பட்டது.

விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை	விபத்துக்களில் சிக்கியோரின் எண்ணிக்கை
0	15
1	16
2	21
3	10
4	17
5	8
6	1
7	

இதற்கான கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் காண்க.

5. கேள்வி 3-ல் கண்ட விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கம் யாது?

6. 220 ஆட்களின் எடைப் பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அதன் திட்ட விலக்கம் யாது?

எடை பவுண்டு களில்	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180
அலை வெண்	3	11	25	37	62	31	22	15	9	5

7. 500 ஆலைகளின் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் விற்பனை அளவு கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

விற்பனை அளவு (ஆயிரங்களில்)	ஆலைகளின் எண்ணிக்கை
0—1000	27
1000—2000	153
2000—3000	215
3000—4000	90
4000—5000	15

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் காண்க. ஷெப்பர்டின் திருத்தம் செய்க.

8. 400 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவினரின் உயரங்களைக் காட்டும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 65·4". திட்ட விலக்கம் 2·31". 600 பேர் கொண்ட மற்றொரு குழுவினரின் உயரங்களைக் காட்டும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 66·6". திட்ட விலக்கம் 2·34" எனில், இவ்விரு குழுக்களும் இணைந்த குழுவினரின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் என்ன? திட்ட விலக்கம் என்ன?

9. A, B என்ற கிரிக்கெட் வீரர்கள், கிரிக்கெட் பந்தயங்களில் எடுத்த ஓட்டங்கள் விவரம் :

***A :** 138, 24, 130, 92, 147, 69, 91, 103, 23, 114, 53, 72, 63, 56.*

***B :** 27, 66, 90, 112, 116, 67, 92, 71, 114, 72, 113, 52, 99, 115.*

இவ்விருவரில் யார் திறமைசாலி; யார் மிகையான நிலைப்புத் தன்மை உடையவர் எனக் காண்க.

4. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, கோட்டளவை, தட்டளவை

மையப் போக்கின் அளவைகளும், பரவுகை அளவைகளும் எண் கூட்டத்தின் தன்மையினையும், அலைவுப் பரவலின் தன்மை யினையும் அறியப் பெரிதும் பயன்படுகின்றன என்று கண்டோம். புள்ளி விவரத்தின் மேலாய்விற்குப் பயன்படுகிற வேறு அளவை களில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (Moments), கோட்டளவை (Skewness), தட்டளவை (Kurtosis) ஆகியவை பற்றி இவ்வத்தியா யத்தில் காண்போம்.

§ 4.1. விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

ஓர் அலைவுப் பரவலில் ஏதாவதொரு மூலப் புள்ளியைப் பொருத்து,

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r \,(x_r - A)^k$$

என்பது, k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை எனப்படுகிறது. இங்கு n, மொத்தப் பிரிவுகளையும், N, மொத்த அலைவெண்ணையும், குறிக்கின்றது. இதனை μ_k' என்று குறிக்கின்றோம். $d_r = x_r - A$ எனக் கொண்டால்,

$$k \text{ ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r \,(d_r)^k$$

$k = 2$ ஆக இருக்கும்பொழுது

இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= \mu_2' = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r \, d_r^2$$

$\mu_2' = s^2$ ஆகும். எனவே μ_2' ஆனது A ஐப் பொருத்து வர்க்க மூலக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்தான். A ஐ $\bar{x}$-ல் எடுத்தால் (அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியில் எடுத்தால்) கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகையினைப் பெறுவோம். கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்த k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை μ_k எனக் குறிப்பிடுவோம்.

எனவே, $\mu_k = \dfrac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r (x_r - \bar{x})^k$

குறிப்பாக, $\mu_1 = \dfrac{1}{N} \Sigma f_r (x_r - \bar{x})$

$= \dfrac{\text{கூட்டுச் சராசரியின்றி அங்கங்களின் விலகல்களின் கூடுதல்}}{N}$

$= \dfrac{0}{N}$

$= 0$

மேலும் $\mu_2 = \dfrac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r (x_r - \bar{x})^2$

$= \sigma^2$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

தேற்றம்: கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_r, மூலப்புள்ளி A யோடு இணைந்த r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_r', $d = \bar{x} - A$ எனில்,

$$\mu_k = \mu_k' - kC_1\, d\, \mu'_{k-1} + kC_2\, d^2 \mu'_{k-2} + \ldots\ldots + (-1)^k d^k.$$

நிரூபணம்: $\mu_k = \dfrac{1}{N} \Sigma f_r (x_r - \bar{x})^k$

$= \dfrac{1}{N} \Sigma f_r [(x_r - A) - (\bar{x} - A)]^k$

$x_r - A = d_r$; $\bar{x} - A = d$ என்க.

$$\mu_k = \frac{1}{N} \Sigma f_r (d_r - d)^k$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_r [d_r^k - kC_1 d_r^{k-1} d + kC_2 d_r^{k-2} d^2 + \ldots\ldots + (-1)^k d^r]$$ (ஈறுருப்புத் தேற்றத்தின்படி)

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_r d_r^k - kC_1 d \frac{\Sigma f_r d_r^{k-1}}{N} + kC_2 d^2 \frac{\Sigma f_r d_r^{k-2}}{N} + \ldots\ldots + (-1)^k d^k \frac{\Sigma f_r}{N}$$

$$\mu_k = \mu_k' - kC_1 d \mu_{k-1}' + kC_2 d^2 \mu_{k-2}' + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^k d^k$$

எனவே கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, A என்ற மூலப்புள்ளியோடு இணைந்த k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளால் கூறப்பட்டுள்ளது.

கிளைத் தேற்றங்கள் :

(i) $k = 1$ என்க.

எனவே $\mu_1 = \mu_1' - d = 0$. ஆகவே, $\mu_1' = d$ ஆகும்.

(ii) $k = 2$ என்க.

$$\mu_2 = \mu_2' - 2C_1 \mu_1' d + d^2$$
$$= \mu_2' - 2d^2 + d^2$$
$$= \mu_2' - d^2$$

($\sigma^2 = s^2 - d^2$ என்ற சூத்திரத்தைக் காட்டுகின்றது.)

(iii) $k = 3$ எனில்,

$$\mu_3 = \mu_3' - 3C_1 \mu_2' d + 3C_2 \mu_1' d^2 - d^3$$
$$= \mu_3' - 3d \mu_2' + 3d^2 . d - d^3$$
$$= \mu_3' - 3d \mu_2' + 2d^3$$

(iv) $k = 4$ எனில்,

$$\mu_k = \mu_4' - 4C_1\, d\, \mu_3' + 4C_2\, d^2\, \mu_2' - 4C_3\, d^3\, \mu_1' + d^4$$

$$= \mu_4' - 4d\, \mu_3' + 6d^2\, \mu_2' - 4d^4 + d^4$$

$$= \mu_4' - 4d\, \mu_3' + 6d^2\, \mu_2' - 3d^4$$

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை மிகத் துல்லியமாகக் கணக்கிட வேண்டிய தருணங்களில் ஷெப்பர்டின் திருத்தத்தினை மேற்கொள்ளவேண்டும். ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளில் பிழைகள் ஒன்றுக்கொன்று சரி செய்து கொள்வதால் பிழைத் திருத்தத்திற்கு இடமில்லை. கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையிலிருந்து $\frac{c^2}{12}$ ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

$$\mu_2 \text{ (திருத்தப்பட்டது)} = \mu_2 \text{ (கணக்கிடப்பட்டது)} - \frac{c^2}{12}.$$

$$\mu_4 \text{ (திருத்தப்பட்டது)} = \mu_4 \text{ (கணக்கிடப்பட்டது)} - \frac{c^2\,\mu_2}{2} + \frac{7}{240}\,c^4$$

இங்கு c பிரிவின் தூரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

மாறி	−·5 ←→ ·5	·5 ←→ 1·5	1·5 ←→ 2·5	2·5 ←→ 3·5	3·5 ←→ 4·5	4·5 ←→ 5·5
அலைவெண்	83	65	36	15	6	1

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் காணல்.

பிரிவுகள்	அலை வெண் f_r	மைய மதிப்பு x_r	$d_r = x_r - A$	$f_r d_r$	$f_r d_r^2$	$f_r d_r^3$	$f_r d_r^4$
$-\cdot5 - +\cdot5$	83	0	0	0	0	0	0
$\cdot5 - 1\cdot5$	65	1	1	65	65	65	65
$1\cdot5 - 2\cdot5$	36	2	2	72	144	288	576
$2\cdot5 - 3\cdot5$	15	3	3	45	135	405	1215
$3\cdot5 - 4\cdot5$	6	4	4	24	96	384	1536
$4\cdot5 - 5\cdot5$	1	5	5	5	25	125	625
மொத்தம்	206			211	465	1267	4017

$$\mu_1' = \frac{211}{206} = 1\cdot024 \quad \left(\because \mu_1' = \frac{\Sigma f_r d_r}{N}\right)$$ (இங்கு $A=0$ எனக் கொள்ளப்பட்டது.)

$$\mu_2' = \frac{465}{206} = 2\cdot25 \quad \left(\because \mu_2' = \frac{\Sigma f_r d_r^2}{N}\right)$$

$$\mu_3' = \frac{1267}{206} = 6\cdot15 \quad \left(\because \mu_3' = \frac{\Sigma f_r d_r^3}{N}\right)$$

$$\mu_4' = \frac{4017}{206} = 19\cdot50 \quad \left(\because \mu_4' = \frac{\Sigma f_r d_r^4}{N}\right)$$

எனவே, $\mu_1 = 0$.

$\mu_2 = \mu_2' - d^2$ (ஆனால் $d = \mu_1'$)

$= \mu_2' - (\mu_1')^2$

$= 2\cdot25 - 1\cdot04$

$= 1\cdot21$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3d\,\mu_2' + 2d^3$$

$$= \mu_3' - 3\,\mu_1'\,\mu_2' + 2(\mu_1')^3$$

$$= 6{\cdot}15 - 6{\cdot}9525 + 2{\cdot}148$$

$$= 1{\cdot}345$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4d\mu_3' + 6d^2\mu_2' - 3d^4$$

$$= \mu_4' - 4\mu_1\mu_3' + 6(\mu_1')^2\mu_2' - 3(\mu_1')^4$$

$$= 19{\cdot}50 - 25{\cdot}3380 + 14{\cdot}3222 - 3{\cdot}3765$$

$$= 5{\cdot}1077$$

§ 4.2. கோட்டளவை (Skewness)

சில பரவல்களின் வரைகள் சமச்சீரான நிலையில் அமையா. எந்த அளவிற்குச் சமச்சீரற்ற தன்மையில் உள்ளன என அறிவது புள்ளியியல் ஆய்விற்கு அவசியமாகும். இவ்வாறு வரைகள் சமச்சீரற்று இருப்பதற்குக் காரணம், பரவல்களின் அங்கங்கள் மைய மதிப்புகளிலிருந்து மிகையாக விலகியிருப்பதேயாகும். சமச்சீரற்ற தன்மை அதன் கோட்டமாகும்.

வரையின் உச்ச மதிப்பிற்கு வலப் பக்கத்தில் அங்கங்கள் நிறைந்திருப்பின் 'நேர்மறைக் கோட்டம்' கொண்ட வரை எனப் படும். இந்நிலையில் வரை உச்ச மதிப்பிற்கு இடப் புறத்தில் விரைந்து உச்சியை அடைந்தும் வலப் புறத்தில் சிறிது சிறிதாகக் கீழிறங்கியும் இருக்கும்.

வரையின் உச்ச மதிப்பிற்கு இடப் பக்கத்தில் அங்கங்கள் நிறைத்திருப்பின் 'எதிர்மறைக் கோட்டம்' கொண்ட வரை எனப்படும். இந்நிலையில் வரை உச்ச மதிப்பிற்கு இடப் புறத்தில் சிறிது சிறிதாக உயர்ந்தும், வலப் புறத்தில் விரைந்து கீழிறங்கியும் இருக்கும்.

கோட்டத்தை அளக்கப் பயன்படுபவை கோட்டளவைகள் ஆகும். சமச்சீராக உள்ள பரவலில் இந்த அளவை பூச்சிய மாகும். கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒன்றேயென நாம் அறிவோம்.

நேர்மறைக் கோட்டத்தில் முகட்டை விடக் கூட்டுச் சராசரி அதிகமானதால், கூட்டுச் சராசரி — முகடு என்பது கோட்டள

வையாகக் கொள்ளப்படுகின்றது. இது பவுண்டுகள், கிலோ, அங் குலங்கள் போன்ற அளவைகளைக் கொண்டதாக இருக்கும். எனவே இரு பரவல்களை ஒப்பிடும்பொழுது, அவை வெவ்வேறு மூல அளவைகள் கொண்டிருக்குமாதலால் கோட்டளவைகளை மூல அளவைகளில் சொல்லக் கூடாது; வெற்றெண்களில் சொல்ல வேண்டும். எனவே அத்தகைய அளவைகளைப் பரவுகை அளவை களில் ஒன்றான திட்ட விலக்கத்தால் வகுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$$\text{எனவே கோட்டளவை} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

என்பதாகும்.

இது பியர்ஸன் சூத்திரமாகும். சமச்சீரற்ற பரவலில் கூட்டுச் சராசரி − முகடு = 3 (கூட்டுச் சராசரி − இடைநிலை) என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகையால்,

$$\text{கோட்டளவை} = \frac{3(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$ என்றும்

கொள்ளலாம். இது ஓர் எண் அளவை என்பதறிக. (நேர்மறைக் கோட்டம் கொண்ட பரவலுக்குக் கோட்டளவை நேர்மறையாக வும், எதிர்மறைக் கோட்டம் கொண்ட பரவலுக்குக் கோட்ட ளவை எதிர்மறையாகவுமிருக்கும் எனத் தெளிக.) பியர்ஸன் கோட்டக் கெழு என்பது இதற்குப் பெயர்.

பியர்ஸன் கோட்டக் கெழு மட்டுமல்லாது வேறொரு கோட்ட ளவையும் உண்டு. அதனைக் கால்மானக் கோட்டக் கெழு என் கிறோம்.

சமச்சீராக உள்ள பரவலில் மேல் கால்மானத்திற்கும் கீழ்க் கால்மானத்திற்கும் நடுவில் கூட்டுச் சராசரி இருக்கும். ஆனால் நேர்மறைக் கோட்டம் கொண்ட பரவலில் மேல் கால்மானம் Q_3 இடைநிலையிலிருந்து (M) விலகி இருக்குமாதலால், $Q_3 - M$-க்கும் $M - Q_1$-க்குமுள்ள வித்தியாசம் $[(Q_3 - M) - (M - Q_1)]$ நேர்மறை யாக இருக்கும். அதனையே கோட்டளவையாகக் கொள்வர். எண் அளவையாகப் பெற $Q_3 - M$-க்கும் $M - Q_1$-க்குமுள்ள கூட்டுத் தொகையால் வகுக்க வேண்டும்.

$$\text{எனவே கால்மானக் கோட்டக் கெழு} = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}$$

$$= \frac{Q_1 + Q_3 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

இது ஒரு வெற்றெண்ணுகும். சமச்சீருள்ள பரவலில் இது பூச்சியமாகும்; நேர்மறைக் கோட்டம் கொண்ட பரவலுக்கு நேர்மறையாகவும், எதிர்மறைக் கோட்டம் கொண்ட பரவலுக்கு எதிர்மறையாகவும் இருக்கும்.

கால்மானக் கோட்டக் கெழு -1-க்கும், $+1$-க்கும் இடையில் இருக்கும்.

§ 4.3. β, γ கெழுக்கள்

புள்ளியியலில் முக்கிய பங்கு வகிக்கும் சில புள்ளியியல் மாறிலிகள் உண்டு.

அவை $\beta_1 = \dfrac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$; $\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

$$\gamma_1 = + \sqrt{\beta_1}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \left| \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \right|$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2}.$$

இவையனைத்தும் வெற்றெண்கள்தாம் என அறியலாம்.

$\dfrac{\sqrt{\beta_1} \cdot (\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$ என்பதும் மற்றொரு கோட்டளவையாகும். கணக்கிடுவது கடினமாகையால், இதை மிகச் சில இடங்களில் மட்டும் பயன்படுத்துவர். மூன்றும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையினைப் பயன்படுத்திக் கையாளப்படும் கோட்டளவை $\sqrt{\dfrac{\mu_3}{\sigma_3}}$ என்பதாகும். இதனை α_3 எனக் குறிப்பிடுவர். கால்மானக் கோட்டளவை போலன்றி இது மிக, அதிகமான, குறைந்த மதிப்புகளால் பெரிதும் பாதிக்கப்படும்.

போதுமான கோட்டம் கொண்ட பரவலில்

$$\alpha_3 = \frac{2\,(\text{இடைநிலை} - \text{முகடு})}{\sigma} = 2\,(\text{பியர்ஸன் கோட்டக் கெழு})$$

சில சமயங்களில் இதனைப் பயன்படுத்தி முகட்டினைக் காணலாம்.

மாணவர்கள் இரு பரவல்களின் கோட்டங்களை ஒப்பிடும் பொழுது ஒரே வகையான கோட்டக் கெழுக்களைக் கண்டுபிடித்து ஒப்பிடவேண்டும் என்பதை நினைவிற் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு : கீழ்க்கண்ட பரவலின் கோட்டக் கெழுவினைக் காண்க.

மாறி	54·5 – 64·5	64·5 – 74·5	74·5 – 84·5	84·5 – 94·5	94·5 – 104·5	104·5 – 114·5	114·5 – 124·5	124·5 – 134·5	134·5 – 144·5
அலைவெண்	3	21	78	182	305	209	81	21	5

முதலில் கீழ்க்கண்ட பட்டியலைத் தயார் செய்துகொள்வோம்.

பிரிவுகள்	அலைவெண் f_r	மைய மதிப்புகள் x_r	d_r	d_r^2	$f_r\, d_r$	$f_r\, d_r^2$	குவிவு அலைவெண்
54·5 – 64·5	3	59·5	–4	16	–12	48	3
64·5 – 74·5	21	69·5	–3	9	–63	189	24
74·5 – 84·5	78	79·5	–2	4	–156	312	102
84·5 – 94·5	182	89·5	–1	1	–82	182	284
94·5 – 104·5	305	99·5	0	0	0	0	589
104·5 – 114·5	209	109·5	1	1	209	209	98
114·5 – 124·5	81	119·5	2	4	162	324	879
124·5 – 134·5	21	129·5	3	9	63	189	900
134·5 – 144·5	5	139·5	4	16	20	80	905

கூட்டுச் சராசரி $= 99{\cdot}5 + \frac{41}{905} \times 10 = 99{\cdot}5 + 0{\cdot}452$

$= 99{\cdot}952$

முகடு $= l + \frac{f-f_1}{2f-f_1-f_2} \times c$

$= 94{\cdot}5 + \frac{305-182}{610-182-209} \times 10 = 100{\cdot}1$

இடைநிலை $= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$

$M = 74{\cdot}5 + \frac{452{\cdot}5 - 102}{182} \times 10 = 93{\cdot}7$

கீழ்க் கால்மானம் $Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c$

$= 74{\cdot}5 + \frac{226{\cdot}5 - 102}{182} \times 10 = 81{\cdot}3$

மேல் கால்மானம் $Q_3 = l_3 + \frac{\frac{3N}{4} - m_3}{f_3} \times c$

$= 74{\cdot}5 + \frac{678{\cdot}75 - 102}{182} \times 10$

$= 106{\cdot}1$

திட்ட விலக்கம்: $\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_r d_r^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_r d_r}{N}\right)^2}$

$= 10 \times \sqrt{\frac{41}{905} - \frac{1533}{(905)^2}}$

$= 10 \times \sqrt{\frac{41}{905} - \frac{1533}{905 \times 905}}$

$= 12{\cdot}96$

எனவே,

(i) பியர்ஸன் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$

$$= \frac{99{\cdot}952 - 100{\cdot}1}{12{\cdot}96}$$

$$= 0{\cdot}011$$

(ii) கால்மானக் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{106{\cdot}1 + 81{\cdot}3 - 187{\cdot}4}{106{\cdot}1 - 81{\cdot}3}$$

$$= 0$$

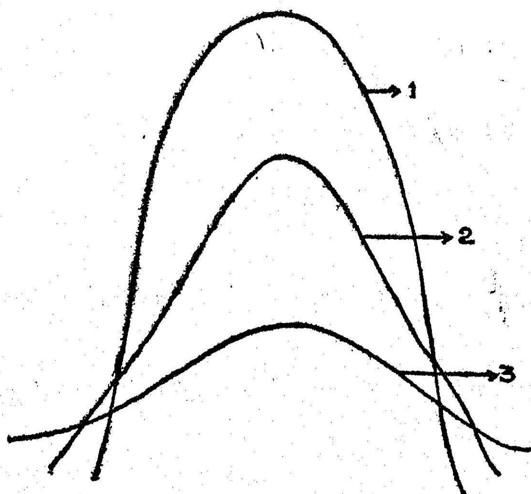
§ 4.4. தட்டை அளவை (Kurtosis)

அலைவுப் பரவலின் வரை உச்சி, வளைவாக இருக்கின்றதா அல்லது தட்டையாக இருக்கின்றதா என அளப்பது தட்டை அளவையாகும். அலைவுப் பரவலின் வரையின் உச்சி வளைவானதென்றோ, தட்டையானதென்றோ வரையைப் பார்த்த மாத்திரத்தில் கூறிவிட முடியாது. காரணம், அச்சுகளின் அலகுகளை மாற்றியமைத்து வளைவானதொரு வரையைத் தட்டையான வரையாகக் காட்டலாம். அவ்வாறே தட்டையானதொரு வரையை வளைவான வரையாகவும் காட்டலாம். எனவே நமது தீர்ப்பிற்கு நடுநிலையாக இயல்நிலை வரையைக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு அலைவுப் பரவலின் வரை உச்சியின் வளைவுத் தன்மையை அளக்க எண் அளவையாக ஓர் அளவை தேவைப்படுகின்றது. இதைத்தான் தட்டை அளவை என்கிறோம்.

β_2 தட்டை அளவையாகும். இயல்நிலை வரைக்கு $\beta_2 = 3$ என்று நிரூபிப்பது எளிது. $\beta_2 > 3$ ஆக அமைந்த வரையைக் குறைத் தட்டை (Lepto Kurtic) யுடையது என்போம். $\beta_2 < 3$ ஆக அமைந்த வரையை மிகைத் தட்டை (Platy Kurtic) யுடையது என்போம்.

தட்டை அளவை, பரவலின் முகட்டிற்கு அருகிலுள்ள அங்கங்களின் எண்ணிக்கையைப் பொருத்ததாகும்.

குறைத் தட்டையுடைய வரை, இயல்நிலை வரையை விட, வளைவுத் தன்மை அதிகமாகக் கொண்டிருக்கும். இயல்நிலை வரை



படம் 18

மிகைத் தட்டையுடைய வரையைக் காட்டிலும் வளைவுத் தன்மை அதிகமாகக் கொண்டிருக்கும். இதை மேற்கண்ட படத்தில் காண லாம்.

எடுத்துக்காட்டு: கீழ்க்கண்ட பரவலின் தட்டை அளவை என்ன?

மாறி	−·5 + −·5	·5 — 1·5	1·5 — 2·5	2·5 — 3·5	3·5 — 4·5	4·5 — 5·5	5·5 — 6·5	6·5 — 7·5	7·5 — 8·5
அலை வெண்	1	8	28	56	70	56	28	8	1

முதலில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காணுவோம்.

பிரிவுகள்	அலைவெண் f_r	மைய மதிப்பு x_r	$d_r = x_r - A$	$f_r d_r$	$f_r d_r^2$	$f_r d_r^3$	$f_r d_r^4$
−·5 − +·5	1	0	−4	−4	16	−64	256
·5 − 1·5	8	1	−3	−24	72	−216	648
1·5 − 2·5	28	2	−2	−56	112	−224	448
2·5 − 3·5	56	3	−1	−56	56	−56	56
3·5 − 4·5	70	4	0	0	0	0	0
4·5 − 5·5	56	5	1	56	56	56	56
5·5 − 6·5	28	6	2	56	112	224	448
6·5 − 7·5	8	7	3	24	72	216	648
7·5 − 8·5	1	8	4	4	16	16	256
	256		0	0	512	0	2816

$$\mu_1' = 0;\ \mu_2' = \frac{512}{256} = 2.$$

$$\mu_3' = 0;\ \mu_4' = \frac{2816}{256} = 11.$$

கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்து,

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2; \quad \mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3;$$

$$= 2 \qquad\qquad = 0$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1^2 - 3\mu_1^4$$

$$= 11$$

எனவே, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0;\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{11}{4} = 2{\cdot}75$

§ 4.5. தொடர் அலைவுப் பரவல் (Continuous F.D.)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் பரவலைக் குறிக்க அலைவெண் வரைவது எவ்வாறு என அறிந்தோம். புள்ளியியலில் உயர்நிலையில் அலைவுப் பரவல்கள் பயன்படுகின்றன. கணக்கியல் சூத்திரங்களோடு இணைந்த வரை, தொடர் அலைவுப் பரவலைக் குறிக்கும். சில நிபந்தனைகளோடு இது சாத்தியமாகும். அலைவெண் பரவலைக் குறிக்கும் இவ்வகைத் தொடர் வரைகளின் குணங்களை அறிவது நலம். பொதுவாகத் தொடர் அலைவுப் பரவலில், கூட்டுச் சராசரி, முகடு, இடைநிலை, விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள், திட்ட விலக்கம் போன்றவை காண என்னென்ன சூத்திரங்களைக் கையாளவேண்டும் என்பதை ஈண்டுக் காண்போம்.

$y = f(x)$, இனத்தொகுதியைக் குறிக்கும் வரையெனக் கொள்வோம். இது அலைவெண் வரை எனப்படும். எதிர்மறை அலைவெண்கள் கிடையாவாகையால் $f(x) \geqslant 0$ ஆகும். பரவல் செவ்வகத்தின் மொத்தப் பரப்பானது மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கும் என அறிவோம். அலைவெண் வரை, பரவல் செவ்வகத்தின் எல்லையேயாகும். எனவே அலைவெண் வரைக்கும், x அச்சுக்குமிடைப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கும். மொத்த அலைவெண் N என்க. அலைவுப் பரவலின் மிகக் கீழ், மேல் எல்லைகள் முறையே a, b என்க. δx என்பது ஒரு தொடக்கத்திற்குரிய இடைவெளியாக இருப்பின் இதன் பரப்பு $f(x)\,dx$ ஆகும்.

எனவே $N = \sum_{a}^{b} f(x)\, dx$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$ [தொகையிடல், தொடர்மாறியின் கூடுதலேயாகும்.]

அலைவெண் வரை $-\infty$-லிருந்து $+\infty$ வரை பரவியிருந்தால்

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

x அச்சிற்கும், வரைக்கும் இடைப்பட்ட பகுதியின் ($x = c$ -லிருந்து, $x = d$ வரை)

$$\text{பரப்பு} = \int_{c}^{d} f(x)\, dx.$$

இது $c \leqslant x \leqslant d$ என்ற இடைவெளியில் மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கும். $c \leqslant x \leqslant d$ என்ற இடைவெளியில் x இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{1}{N} \displaystyle\int_{c}^{d} f(x)\, dx.$

எனவே நாம் ஒரு புதுச் சார்பினை வரையறுப்போம்.

$$\phi\,(x) = \frac{f(x)}{N}$$

x ஆனது $c \leqslant x \leqslant d$-ல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\displaystyle\int_{c}^{d} \phi\,(x)\, dx$

எனவும், மொத்த நிகழ்தகவு $= \displaystyle\int_{a}^{b} \phi(x)\, dx = \frac{1}{N} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

$= \dfrac{N}{N} = 1$ எனவும் நாம் அறியலாம்.

$\phi(x)$ ஐ நிகழ்தகவுச் சார்பு எனலாம்.

பண்புகள் : அலைவெண் பரவலுக்கான எல்லாப் பண்புகளும் அலைவெண் வரைக்கும் நிகழ்தகவு வரைக்கும் பொருந்தியிருத்தலைக் காணலாம். நுண்கணித அறிவின் துணைகொண்டு இதனை எளிதில் அறியலாம். இங்கு இடைவெளி (a, b) எனக் கொண்டிருப்பினும் அதை $-\infty$, $+\infty$ க்கும் கொள்ளலாம் என்பதறிக.

(i) கூட்டுச் சராசரி $(\bar{x}) = \dfrac{\Sigma f(x)\,\delta x . x}{N}$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b x\,\phi(x)\,dx.$$

(ii) கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த முதல் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $\mu_1 = \dfrac{\Sigma (x - \bar{x})\,f(x)\,\delta x}{N}$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b (x - \bar{x})\,f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b x\,f(x)\,dx - \frac{\bar{x}}{N}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \bar{x} - \bar{x}\,\frac{N}{N} = 0$$

அதாவது கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலகல்களின் கூடுதல் $= \Sigma (x - \bar{x})\,f(x)\,dx = N\mu_1 = 0$ ஆகும்.

(iii) s^2 (மூலப்புள்ளி பூச்சியமாக இருப்பின்) $= \frac{1}{N}\Sigma f(x)\,\delta x\, x^2$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b f(x)\,x^2\,dx$$

$$= \int_a^b x^2\,\phi(x)\,dx$$

(iv) $\sigma^2 = \frac{1}{N}\int_a^b (x-\bar{x})^2 f(x)\,dx = \int_a^b (x-\bar{x})^2\,\phi(x)\,dx.$

(v) s^2 (மூலப்புள்ளி A ஐப் பொருத்து)

$$= \frac{1}{N}\int_a^b (x-A)^2 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b \left[(x-\bar{x}) + (\bar{x}-A)\right]^2 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b (x-\bar{x})^2 f(x)\,dx + \frac{2(\bar{x}-A)}{N}\int_a^b (x-\bar{x})\,f(x)\,dx$$

$$+ \frac{(\bar{x}-A)^2}{N}\int_a^b f(x)\,dx$$

$= \sigma^2 + 0 + (\bar{x}-A)^2$

$= \sigma^2 + d^2$ ($d = \bar{x} - A$ என்க.)

எனவே $\sigma^2 = s^2 - d^2$ ஆகும்.

(vi) மூலப்புள்ளி பூச்சியத்தைப் பொருத்து k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_k' = \frac{1}{N}\int_a^b x^k f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b x^k \phi(x)\,dx.$$

(vii) மூலப்புள்ளி, கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்து k ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_k = \frac{1}{N}\int_a^b (x-\bar{x})^k f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (x-\bar{x})^k \phi(x)\,dx.$$

(viii) $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ எனில், $F(x)$ ஆனது a-விருந்து x வரை குவிவு அலைவெண்ணைக் குறிக்கும். எனவே $y = F(x)$ அதன் ஓசைவ் வரையாகும்.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \frac{N}{2}$ என்பதில் x-ன் மதிப்பு இடைநிலையாகும்.

நிகழ்தகவு வரையில் $\int_a^x \phi(t)\,dt = \frac{1}{2}$ என்பதில் x-ன் மதிப்பை இடைநிலையாகக் கொள்ளலாம்.

(ix) $f(x)$-ன் மதிப்பு எங்கு அதிகமாக உள்ளதோ அப்புள்ளி தான் முகட்டுப் புள்ளியாகும். அப்புள்ளியில் $f'(x) = 0$ ஆகும்.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

எனவே $F'(x) = f(x)$; மேலும் $F''(x) = f'(x) = 0$

ஆனால் $F''(x) = 0$ ஆனது $y = F(x)$ வரையின் திருகுப் புள்ளியைக் கொடுக்கும். எனவே ஓர் அலைவுப் பரவலின் முகடு அதன் ஒகைவ் வரையின் திருகுப்புள்ளியின் x மதிப்பாகும்.

(x) கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்து,

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{N}\int_a^b f(x)\,|x-\bar{x}|\,dx$$

$$= \int_a^b \phi(x)\,|x-\bar{x}|\,dx,$$

(xi) கீழ்க் கால்மானம் $\int_a^{Q_1} f(x)\,dx = \frac{N}{4}$-ல் Q_1-ன் மதிப்பாகும்.

மேல் கால்மானம் $\int_{Q_3}^b f(x)\,dx = \frac{3N}{4}$-ல் Q_3-ன் மதிப்பாகும்.

கால்மான விலக்கம் $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ ஆகும்.

நிகழ்தகவு வரையில் Q_1-ம், Q_3-ம் முறையே

$\int_a^{Q_1} \phi(x)\,dx = \frac{1}{4}$; $\int_{Q_3}^b \phi(x)\,dx = \frac{1}{4}$ என்பவற்றில் பெறப்படும் மதிப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $x = -\frac{1}{2}$-க்கும், $x = +\frac{1}{2}$-க்கும் இடையில் $y = 1$ என்னும் சூத்திரம் ஒரு செவ்வகப் பரவலைக் குறிக்கின்றது. அதன் திட்ட விலக்கத்தினைக் காண்க.

இந்த நேர்கோட்டிற்கும் x அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட பகுதி ஒரு சதுரமாகும். இதன் பரப்பு 1 சதுர அலகாகும். y அச்சைப் பொருத்து இது சமச் சீர்த்தன்மை வாய்ந்தது. எனவே $\bar{x} = 0$.

மேலும் $\mu_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^2 f(x)\, dx$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{12}$$

ஆகையால் $\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{\cdot}289$ (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 2: $0 \leqslant x \leqslant 1$ எனும்பொழுது $f(x) = x^3$ ஆகவும், $1 \leqslant x \leqslant 2$ எனும்பொழுது $f(x) = (2-x)^3$ ஆகவுமுள்ள ஒரு தொடர் பரவலின் சராசரி விலக்கத்தையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

மொத்த அலைவெண் = பரப்பு $= \int_0^1 x^3\, dx + \int_1^2 (2-x)^3\, dx.$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\left[\int_{\bar{x}}^{1} x^4\, dx + \int_1^2 x\,(2-x)^3\, dx\right]}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[\int_0^1 x^4\, dx + \int_1^2 x\,(2-x)^3\, dx\right]$$

$$= 1.$$

s^2 (யாதானுமொரு மூலப்புள்ளி, பூச்சியமெனக் கொண்டு)

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\int_0^1 x^5\, dx + \int_1^2 x^2\,(2-x)^3\, dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 x^5\, dx + \int_1^2 x^2\,(2-x)^3\, dx\right]$$

$$= \frac{16}{15} = 1{\cdot}066$$

எனவே, $\sigma^2 = (1{\cdot}066) - (1)^2 = 1{\cdot}066 - 1 = {\cdot}066.$

$$\sigma = \sqrt{{\cdot}066} = {\cdot}257$$

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = 2\left[\int_1^0 (1-x)\, x^3\, dx + \int_1^2 (x-1)\,(2-x)^3\, dx\right]$$

$$= {\cdot}2$$

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்கான முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	10	18	12	7	2	0

2. ஒரு பரவலில், $x=4$ என்பதோடு இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே 1, 4, 10, 45 எனில், கூட்டுச் சராசரி$=5$; மாறுபாடு 3; $\mu_3=0$; $\mu_4=26$ என் நிறுவுக.

3. மூலப்புள்ளி 5 என்பதோடு இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே — 0·55, 4·46, — 0·43, 68·52. β_1, β_2 -இவற்றைக் காண்க.

4. $\beta_2 > 1$ என நிறுவுக.

5. கீழ்க்கண்ட பரவலில் கோட்டக் கெழுவினைக் காண்க.

x:	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40
f:	9	14	21	17	8	2	1

6. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கான கால்மானக் கோட்டக் கெழு என்ன ?

x:	4—4·2	4·2—4·4	4·4—4·6	4·6—4·8	4·8—5·0
f:	1	2	18	35	45

5·0—5·2	5·2—5·4	5·4—5·6	5·6—5·8
31	24	6	1

7. கீழ்க்கண்ட பரவலின் எல்லாவிதக் கோட்டக் கெழுக் களையும் கணக்கிடுக.

x:	1—5	6—10	11—15	16—20	21—25	26—30	31—35
f:	3	4	28	30	10	6	2

8. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம், கால்மான விலக்கம் யாவை? கோட்டக் கெழுவினையும் காண்க.

வாரச் சம்பளம்	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
0—க்குமேல்	685
10—க்குமேல்	500
20—க்குமேல்	423
30—க்குமேல்	389
40—க்குமேல்	209
50—க்குமேல்	73
60—க்குமேல்	50
70—க்குமேல்	0

9. மூலப் புள்ளியோடு இணைந்த முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் வருமாறு :

$$\mu_1' = \frac{n+1}{2}; \quad \mu_2 = \frac{(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

$$\mu_3' = \frac{n(n+1)^2}{4}$$ எனில்,

புள்ளி விவரத்தின் கோட்டத்தினை ஆய்க.

10. இரண்டு தொழிற்சாலைகளின் சம்பளப் பட்டியல் பற்றிய விவரங்கள்:

	தொழிற்சாலை A ரூ.	தொழிற்சாலை B ரூ.
கூட்டுச் சராசரி சம்பளம்	175	180
இடைநிலைச் சம்பளம்	172	170
முகட்டுச் சம்பளம்	167	162
கால்மானங்கள்	162,178	165,185
திட்ட விலக்கம்	13	19

இவ்விரண்டையும் ஒப்பிட்டு நோக்குக.

11. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கான தட்டையளவைக் காண்க.

x:	0—10	10—20	20—30	30—40
f:	1	3	4	2

12. 25 கல்லூரி மாணவர்கள் எடைகள் பற்றிய விவரங்களில் இருந்து 51 கிலோ என்பதோடு இணைந்த முதல் மூன்று பெருக்குத் தொகைகள் $\mu_1' = +\ 0{\cdot}4$ கிலோ. $\sqrt{\mu_2'} = 1{\cdot}2$ கிலோ. $(\mu_3')^{\frac{1}{3}} = -\ 0{\cdot}25$ கிலோ. கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், கோட்டக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

13. $f(x) = 6x\ (1-x)\ ;\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$ இதற்குரிய கூட்டுச் சராசரியையும் முகட்டினையும் காண்க.

14. 0, 2 ஆகிய மதிப்புகளுக்கிடையே வேறுபடும் ஒரு மாறியின் அலைவுப் பரவல் வருமாறு :

$$f(x) = x^3 \ (0 \leqslant x \leqslant 1)$$
$$f(x) = (2-x)^3 \ (1 \leqslant x \leqslant 2)$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

5. நிகழ்தகவு
(Probability)

§ 5.1. அறிமுகம்

'இன்று மழை பெய்யலாம்', 'இந்த நேரத்தில் தெரு முனையில் ஒரு வாடகை வண்டியும் கிடைக்காது', 'நம் கல்லூரி மாணவர்கள் இந்த வருடம் நிறையப் பேர் தேர்வில் வெற்றி பெறுவர்' என்றெல்லாம் நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் சொல்லக் கேட்டிருக்கின்றோம் அல்லவா? இவையனைத்தும் கடந்த கால அனுபவங்களை நினைவிற்கொண்டு நிகழ்கால நிகழ்ச்சிகளைக் கணித்துக் கூறப்படுவனவாகும். இதனால் எதிர்காலத்தையும் கணித்துக் கூறமுடியும். எல்லோராலும் ஒரே மாதிரிக் கணிக்க முடியாது. வெவ்வேறு மனிதர்கள் வெவ்வேறாகக் கூறுவர். புள்ளியியலில், மாறுபட்ட கருத்துக்களை மேற்கொள்ளாமல் வரையறுக்கப்பட்ட கணிதத்தின் வாயிலாக ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்குரிய வாய்ப்பினை அறிவது நிகழ்தகவாகும்.

ஒவ்வொரு முறையும் நிகழ்ச்சி நிச்சயம் நிகழுமெனில் இவ்விகிதம் ஒன்று. எனவே நிச்சயமான நிகழ்ச்சிக்கு நிகழ்தகவு ஒன்று என்பது தெளிவு. ஒவ்வொரு மனிதனும் நிச்சயம் ஒரு நாள் இறந்துவிடுவான். மனிதனின் இறப்புக்கான நிகழ்தகவு எப்பொழுதாகிலும் ஒன்று எனப் புள்ளியியல் வல்லுநர்கள் கூறுவார்கள்.

நிகழ்ச்சி என்றைக்கும் நிகழாது எனில் அதற்கான நிகழ்தகவு பூச்சியம் என அறியலாம். எனவே, நிகழ்தகவு எல்லா நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பூச்சியத்திலிருந்து ஒன்று வரை அமையும்.

பல நிகழ்ச்சிகளை ஆய்ந்து அறியப்படும் இவ்வகை நிகழ்தகவைப் புள்ளியியல் நிகழ்தகவு என்கிறோம்.

இந்திய அரசாங்கம் வெளியிட்ட 1941—50ஆம் வருடத்திற்கான பிறப்பு இறப்புப் பட்டியலில், 5 வயதுக் குழந்தை 40 வயது

வரை வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு ·61977 என்று கூறப்பட்டுள்ளது. அதாவது, 5 வயதுக் குழந்தைகள் ஒரு லட்சம் பேர்களில் 61,977 குழந்தைகள் 40 வயது வரை வாழும். புள்ளியியலில் கண்டறிந்த புள்ளி விவரங்களிலிருந்து இதுபோன்று கணிப்பதே நிகழ்தகவுக் கொள்கையாகும்.

இது தவிர மற்றொரு நிகழ்தகவுமுண்டு. அது கணக்கியல் நிகழ்தகவு எனப்படும். இது தர்க்கத்தின் மூலமாகப் பெறப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, சீரான நாணயம் ஒன்றைச் சுண்டினுல் நிகழ்கின்ற இயக்கங்கள் இரண்டேயாகும். பூ விழலாம் அல்லது தலை விழலாம்; பூ விழுவதைக் காட்டிலும் தலை விழுவதற்கான வாய்ப்புகள் அதிகம் உண்டு என்றோ அல்லது தலை விழுவதைக் காட்டிலும் பூ விழுவதற்கான வாய்ப்புகள் அதிகம் உண்டு என்றோ கூற இயலாது. காரணம், நாணயம் சீரானதாகும். எனவே, பூவிற்கும் தலைக்குமுள்ள நிகழ்தகவு சமமானதாகும். மேலும், நெட்டுக்குத்தாக நிற்க இயலாதபடி உயரம் குறைந்த அளவுடைய நாணயம் எடுத்துக்கொண்டு சுண்டினுல் மொத்த நிகழ்தகவு ஒன்று என்பதால், பூ, தலை ஆகியவற்றிற்கு நிகழ்தகவு ஒவ்வொன்றிற்கும் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

இதுபோன்றே அறுமுகப் பகடையைச் சுற்றிவிட்டால், ஒரு முகம் பிறழ்வதற்குரிய வாய்ப்பு $\frac{1}{6}$ ஆகும். இங்ஙனம் நிகழ்ச்சிகள் நடப்பதற்கு முன்னமேயே, நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவினைத் தீர்மானிக்கின்றோம். கண்டறிந்த எல்லா நிகழ்ச்சிகளுக்கும் இது பொருந்தும் எனச் சொல்வதற்கில்லை. உதாரணமாக, பிறப்பு இறப்புப் பட்டியலில் நிகழ்தகவினை இவ்வகையில் காண இயலாது.

கணக்கியல் நிகழ்தகவிற்கும் புள்ளியியல் வரையறையைத் தரலாம். சீரான நாணயத்தை 10,000 தடவைகள் சுண்டினுல் பொதுவாக 5000 தடவைகள் பூவும், 5000 தடவைகள் தலையும் பிறழ்வதைக் காணலாம். (தலைகள் 5020 தடவைகள் பிறழ்வதாகக் கொள்வோம்.) புள்ளியியல் விவரப்படி

தலை பிறழ்வதற்கான நிதழ்தகவு $= \frac{5020}{10000}$ ஆகும். இதையே

ஒரு லட்சம் தடவைகள் சுண்டித் தலை பிறழ்வதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிட்டால் இந்த விகிதம் $\frac{1}{2}$ ஆகிவிடும். எனவே கணக்கியல் நிகழ்தகவும் புள்ளியியல் வரையரைக்குட்பட்டதாகும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி a தடவைகள் நிகழும் என்க. b தடவைகள் நிகழத் தவறும் என்க. $(a+b)$ நிகழ்ச்சிகளும் சம வாய்ப்புடையன எனில் அந்நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{a}{a+b}$ என்பதாகும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு p எனவும், அது நிகழத் தவறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு q எனவும் கொண்டால், $p+q=1$ என்பது எளிதில் புலனாகும். $p = 1$ எனில் அந்நிகழ்ச்சி நிச்சயம் நிகழும். $p = 0$ எனில் அந்நிகழ்ச்சி நிச்சயம் நிகழாது எனக் கருதலாம். ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு p எனில், N தடவைகளுள் pN தடவைகள் அது நிகழும் என்பதுண்மை.

§ 5.2. சேர்மானம் (Combinations)

'காரணீயப் பெருக்கம் (Factorial) n' ஐ $\angle n$ அல்லது $n!$ என எழுதுவோம். $n! = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots (n-1).\, n$

கொடுக்கப்பட்ட வெவ்வேறான n பொருட்களில், r பொருட்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வழிகளின் எண்ணிக்கையை $^{n}C_r$ என்போம்.

$$^{n}C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\angle r}$$

$$= \frac{\angle n}{\angle n-r \;\angle r}$$ (இதன் நிரூபணம் இயற்கணிதப் புத்தகத்தில் பெறலாம்.

குறியீட்டு முறை (Notations) : நிகழ்ச்சிகளை A, B, C என்ற எழுத்துகளால் குறிப்போம். $P(A)$ என்பது A என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவாகும். $P(A+B)$ என்பது A என்ற நிகழ்ச்சியோ அல்லது B என்ற நிகழ்ச்சியோ நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவாகும். $P(A/B)$ என்பது B என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்து, A என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவாகும். $P(AB)$ என்பது A-ம் B-ம் ஒரே நேரத்தில் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: நன்கு கலக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு உருவப்பட்டது. (a) அது ஸ்பேடாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? (b) அது 9 ஆக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

1 (a) சீட்டுக் கட்டில் 52 சீட்டுகள் உள்ளன. அதில் 13 ஸ்பேடுகள் உள்ளன. 52 சீட்டுகளில் ஏதாவது ஒரு சீட்டை எடுப்பதற்கான வழிகள் 52 ஆகும்.

எனவே உருவப்பட்ட சீட்டு ஸ்பேடாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ஆகும்.

(*b*) சீட்டுக் கட்டில் நான்கு 9 உள்ளன. இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை 4.

எனவே நிகழ்தகவு $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

எடுத்துக்காட்டு 2 : நன்கு கலைக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் உருவப்பட்டால் (*a*) ஒன்று ஸ்பேடாகவும் மற்றது ஹார்ட்டாகும் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (*b*) ஒன்று எட்டாகவும் மற்றது ஏஸாகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? (*c*) இரண்டுமே ஏஸாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

(*a*) 52 சீட்டுகளில் இரண்டினை உருவுவதற்கான வழிகள் $= 52C_2 = \frac{52 \times 51}{1 \times 2} = 26 \times 51$ ஆகும்.

ஒரு ஸ்பேடையும், ஒரு ஹார்ட்டையும் எடுப்பதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 13 \times 13$.

நிகழ்தகவு $= \frac{13 \times 13}{26 \times 51} = \frac{13}{102}$ ஆகும்.

(*b*) எட்டையும் ஏஸையும் எடுப்பதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 13$.

எனவே நிகழ்தகவு $= \frac{4 \times 13}{26 \times 51} = \frac{2}{51}$

(*c*) நான்கு ஏஸ்களில் இரண்டு ஏஸ்களை எடுப்பதற்கான வழிகள் $= 4C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$.

எனவே இரண்டு ஏஸ்களை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= \frac{6}{26 \times 51} = \frac{1}{221}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : இரு பகடைகளைச் சுற்றிவிட, விழும் இரண்டு அறுமுகப் பட்டையின் புள்ளிகளின் கூடுதல் 8 ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

நிகழக்கூடிய மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6 = 36$.

நிகழவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை

$= (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$-ல் x^8-ன் கெழு.

$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2$-ல் x^6-ன் கெழு.

$= \left(\dfrac{1 - x^6}{1 - x}\right)^2$-ல் x^6-ன் கெழு.

$= (1 - x^6)^2 (1 - x)^{-2}$-ல் x^6-ன் கெழு.

$= (1 - 2x^6 + x^{12}) (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + \ldots)$-ல் x^6-ன் கெழு.

$= 7 - 2$

$= 5$

எனவே, வேண்டிய நிகழ்தகவு $\frac{5}{36}$.

மாற்று வழி (Aliter)

நிகழக்கூடிய மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6 = 36$.

பகடைகளைச் சுற்றிவிட விழும் புள்ளிகளின் கூடுதல் 8 ஆக அமைவதற்குரிய முறைகள் (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6) ஆகிய 5 ஆகும். இதில் முதல் உருபு முதல் பகடையில் விழும் புள்ளி, இரண்டாம் உருபு இரண்டாம் பகடையில் விழும் புள்ளி யாகும்.

எனவே வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{5}{36}$.

எடுத்துக்காட்டு 4 : 'QUESTION' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகள் வரிசையாக மாற்றி மாற்றி எழுதப்பட்டன. (i) S என்ற எழுத்தில் முடியும் சொல்லைப் பெற நிகழ்தகவு என்ன? (ii) T-ல் தொடங்கி S-ல் முடியும் சொல்லைப் பெற நிகழ்தகவு என்ன? (iii) S-க்கும் T-க்கும் இடையே ஐந்து எழுத்துகள் மட்டுமே அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(i) Question என்ற சொல்லில் உள்ள 8 எழுத்துகளை மாற்றி மாற்றி 8! வழிகளில் எழுதலாம். S என்ற எழுத்தைக் கடைசியில் எழுத மற்ற ஏழு எழுத்துகளையும் மாற்றி மாற்றி 7! வழிகளில் எழுதலாம். எனவே S ஐக் கடைசி எழுத்தாகக் கொண்ட சொல்லைப் பெறப் நிகழ்தகவு $= \dfrac{7!}{8!} = \dfrac{1}{8}$.

வேறு வழி: S என்ற எழுத்தை எட்டு இடங்களில் ஏதாவதொரு இடத்தில் வைக்கலாம். இவையனைத்தும் சமவாய்ப்புக் கொண்டவை. எனவே S-ல் முடிந்த சொல்லைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{8}$

(ii) இரண்டாம் முறையை உபயோகித்து Sஐ 8 வழிகளில் அமைக்கலாம். Sஐப் பொருத்திய பின் மீதி 7 இடங்களில் ஏதாவதொரு இடத்தில் Tஐ 7 வழிகளில் பொருத்தலாம். எனவே S ஐயும் T ஐயும் பொருத்த 56 வழிகள் உள்ளன. இவற்றுள் T-ல் துவங்கி S-ல் முடியும் சொல் ஒன்றேயாகும்.

$$\text{எனவே, வேண்டிய நிகழ்தகவு} = \frac{1}{56}$$

(iii) மேற்கூறியபடி S ஐயும் T ஐயும் 56 வழிகளில் பொருத்தலாம். S-க்கும் T-க்குமிடையில் 5 எழுத்துகள் அமைய வேண்டுமாதலின், நாம் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம். Sஐ முதலிடத்திலும் Tஐ 7ஆவது இடத்திலும் வைக்கலாம்; அல்லது Sஐ இரண்டாமிடத்திலும் Tஐ எட்டாமிடத்திலும் வைக்கலாம்; அல்லது Tஐ முதலிடத்திலும் Sஐ ஏழாமிடத்திலும் வைக்கலாம்; அல்லது Tஐ இரண்டாமிடத்திலும் Sஐ எட்டாமிடத்திலும் வைக்கலாம். எனவே இந்த நான்கு வழிகளிலும் ஏதேனுமொரு வழியை மேற்கொள்ளலாம்.

$$\text{எனவே, வேண்டிய நிகழ்தகவு} = \frac{4}{56}$$

$$= \frac{1}{14}$$

§ 5.3. ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

இரு நிகழ்ச்சிகளுள், ஒன்று நிகழ்ந்து, மற்றதை நிகழா வண்ணம் தடுக்குமானால் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளை ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்போம். சமச்சீரான நாணயம் ஒன்றைச் சுண்டத் தலை விழும் அல்லது பூ விழும். தலை விழுதல், பூ விழுதல் ஆகிய இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். அவ்வாறே தேர்வு எழுதும் மாணவர் வெற்றி பெறுவர் அல்லது தோல்வி அடைவர். வெற்றி பெறுதல், தோல்வி அடைதல் ஆகிய நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளே.

பல நிகழ்ச்சிகளுள், ஒன்று நிகழ்ந்து, அது மற்ற எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் நிகழாவண்ணம் தடுத்தலும் உண்டு. அவ்வமயம், நிகழ்ச்சிகளை ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்று கூறுவோம். எடுத்துக்காட்டாக, அறுமுகப் பகடையைச் சுற்றி விட, முகப்புள்ளி 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகியவற்றுள் ஏதாவதொன்று கிடைக்கும். இவை ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூட்டல் தேற்றம்: ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் பல நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று அல்லது வேறொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, அந்நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலாகும்.

எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் மொத்தம் N தடவைகள் நிகழ்கின்றன எனக் கொள்க. தனித்தனி நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ என்க. முதல் நிகழ்ச்சி a_1 தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொண்டால் அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_1 = \dfrac{a_1}{N}$.

இவ்வாறே இரண்டாம் நிகழ்ச்சி a_2 தடவைகளில் நிகழ்வதாகக் கொண்டால் அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_2 = \dfrac{a_2}{N}$.

இதுபோன்றே n ஆவது நிகழ்ச்சி a_n தடவைகளில் நிகழ்வதாகக் கொண்டால் அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_n = \dfrac{a_n}{N}$.

ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால், ஒன்று நிகழும்போது மற்றவை நிகழா. எனவே, இந்த n நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று அல்லது மற்றது நடப்பது $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ தடவைகளாகும்.

ஒன்று அல்லது வேறொன்று நிகழ்வதற்குரிய

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{N}$$

$$= \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_n}{N}$$

$$= p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots + p_n.$$

எனவே ஒன்று அல்லது வேறொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, தனித்தனியான நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலாகும்.

குறிப்பு: A, B என்பனவற்றை உப நிகழ்ச்சிகளாகக் கொண்டு, $A+B$ என்பதை நிகழ்ச்சியாகக் கொண்டால் $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ என்பது பொதுவான தேற்றமாகும். இது நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் தன்மையனவாக இல்லாவிடினும் பொருந்தும்.

நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் தன்மையன வாகில் $P(AB) = 0$ ஆனுல்,

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$ என்பதாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டி லிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கப்படுகின்றன. இரண்டு சீட்டுகளும் ஏஸாகவோ, ராஜாவாகவோ, ராணி யாகவோ, ஜாக்காகவோ அமைய நிகழ்தகவு யாது?

இரண்டு சீட்டுகளை எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= {}^{52}C_2 = \frac{52 \times 51}{1 \times 2}$

இரண்டு ஏஸ்களை எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= {}^{4}C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2}$

$\therefore$ இரண்டும் ஏஸ்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{4 \times 3}{52 \times 51}$

$$= \frac{1}{221}.$$

இதுபோன்றே,

இரண்டும் ராஜாக்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{221}$

இரண்டும் ராணிகளாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{221}$

இரண்டும் ஜாக்குகளாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{221}$

எனவே வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{221} + \frac{1}{221} + \frac{1}{221} + \frac{1}{221}$

$$= \frac{4}{221}$$

§ 5.4. சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்

சில நிகழ்ச்சிகள் நிகழும்பொழுது, பிற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வது எவ்வகையிலும் பாதிக்கப்படாமலிருப்பின், அத்தகு நிகழ்ச்சிகளுக்குச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events) என்பது பெயர்.

பெருக்குத் தேற்றம்; ஒரே சமயத்தில் பல சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, அந் நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும்.

இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். மொத்தம் N தடவைகள் நிகழுகின்றன என்போம். நிகழ்ச்சிகளுக்கான தனித்தனி நிகழ்தகவு p_1, p_2 எனக் கொள்வோம். எனவே N தடவைகளுள் முதல் நிகழ்ச்சி $p_1 N$ தடவைகள் நிகழும். இந்த $p_1 N$ தடவைகளுள் இரண்டாவது நிகழ்ச்சி $p_2(p_1 N) = p_1 p_2 N$ தடவைகள் நிகழும். காரணம் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதால் மற்றது எவ்வகையிலும் பாதிக்கப்படுவதில்லை. எனவே இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே சமயத்தில் நிகழும் தடவைகள் $p_1 p_2 N$ ஆகும்.

எனவே வேண்டிய நிகழ்தகவு = இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{p_1 p_2 N}{N}$$

$= p_1 p_2 =$ தனித்தனியான நிகழ்தகவுகளின் பெருக்கம்.

இதுபோன்றே n நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டும் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் p_1, p_2 என்க. இந் நிகழ்ச்சிகள் நிகழாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே q_1, q_2 எனில்,

(i) இரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $= p_1 p_2$

(ii) முதலது நிகழ்ந்து, பின்னது நிகழாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= p_1 q_2$

(iii) இரண்டாம் நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்து மற்றது நிகழாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= p_2 q_1$

(iv) இரண்டும் நிகழாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= q_1 q_2$.

எல்லாவகையான சம்பவங்களையும் மேலே குறிப்பிட்டபடி சேர்க்க அதில் கூடுதல் = 1 ஆகும்.

அதாவது $p_1 p_2 + p_1 q_2 + p_2 q_1 + q_1 q_2$

$$= (p_1 + q_1)\ (p_2 + q_2)$$
$$= 1 \times 1$$
$$= 1.$$

சார்ந்த நிகழ்தகவு (Conditional Probability): E_1, E_2 என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள் என்க. E_1 நிகழ்ந்து, பின் E_2 நிகழ்கின்றது என்றால் பெருக்குத் தேற்றம் இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொருந்தும். p_1, p_2 முறையே அவற்றின் நிகழ்தகவு ஆனால் p_2 ஐ E_2-ன் சார்ந்த நிகழ்தகவு எனக் கூறுகின்றோம்.

தேற்றம்: A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவானது, A நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவையும், A நிகழ்ந்து B நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவையும் பெருக்கிய பெருக்கல் பலனுக்குச் சமமாகும்.

நிரூபணம்: மொத்தம் N தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொள்வோம். இதில் A, m_1 தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொள்வோம். இந்த m_1 தடவைகளில், m_2 தடவைகள் B நிகழ்ந்து விட்டதாகக் கொள்வோம். எனவே m_2 தடவைகளில் A-ம் B-ம் நிகழ்கின்றன.

எனவே A-ம் B-ம் ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதற்கான

நிகழ்தகவு $= P(AB) = \dfrac{m_2}{N}$

$$= \frac{m_1}{N} \cdot \frac{m_2}{m_1}$$

= (A நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு) ×

(A நிகழ்ந்து, B நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு)

$$= P(A) \times P(B|A)$$

எனவே, $P(AB) = P(A) \times P(B|A)$

இதேபோன்று, $P(AB) = P(B) \times P(A|B)$ என நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: A-ம் B-ம் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில், ஒன்று நிகழ்வது மற்றதைப் பாதிப்பதில்லையாதலின், B-ன் நிகழ்தகவானது A நிகழ்வதாலும் நிகழாதிருப்பதாலும் மாறுவதில்லை.

எனவே $P(B|A) = P(B)$

மேலும் $P(A|B) = P(A)$

ஆனால் $P(AB) = P(A) . P(B)$

இதுவே நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஒரு பையில் இரண்டு சிவப்புப் பந்துகளும், 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. மற்றொரு பையில் மூன்று சிவப்புப் பந்துகளும் 5 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பையிலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகின்றது. இரண்டும் ஒரே நிறமாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

இரண்டும் ஒரே நிறமாக இருத்தல் வேண்டும் என்று கூறப்பட்டிருப்பதால் இரண்டும் சிவப்பாக இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவு.

முதல் பையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \frac{2}{5}$

இரண்டாவது பையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{8}$

எனவே வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$

(இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும். எனவே பெருக்கல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.)

எடுத்துக்காட்டு 2: ஒரு மேஜையில் மூன்று அறைகளுண்டு. முதல் அறையில் இரண்டு சிவப்புப் பந்துகளும், 5 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. இரண்டாவது அறையில் மூன்று சிவப்புப் பந்துகளும், 15 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. மூன்றும் அறையில் 5 சிவப்புப் பந்துகளும், 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒருவர்

இருட்டில் மூன்று அறைகளில் ஒன்றினைத் திறந்து அதிலுள்ள பந்துகளுள் யாதானுமொன்றை எடுக்கின்றார். அது சிவப்புப் பந்தாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

மூன்று அறைகளுக்கும் சம வாய்ப்புகளிருப்பதால் முதல் அறையைத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3}$.

ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{7}$.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாதலால் முதல் அறையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$.

இதேபோன்று இரண்டாம் அறையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3} \times \frac{3}{18} = \frac{1}{18}$.

மூன்றும் அறையிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$.

இவ்வறைகளிலிருந்து பந்தை எடுப்பது ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$\text{எனவே வேண்டிய நிகழ்தகவு} = \frac{2}{21} + \frac{1}{18} + \frac{5}{36}$$

$$= \frac{24 + 21 + 35}{252}$$

$$= \frac{20}{63}$$

எடுத்துக்காட்டு 3: இரண்டு ஆராய்ச்சியாளர்கள் ஒரு பிரச்சினையைத் தனித்தனியாக ஆராய்கிறார்கள். முதல் ஆராய்ச்சியாளர் பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \cdot 6$ என்றும், இரண்டாம் ஆராய்ச்சியாளர் பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \cdot 7$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் பிரச்சினை தீர்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

முதல் ஆராய்ச்சியாளர் பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \cdot 6$

அவர் தோற்று, இரண்டாம் ஆராய்ச்சியாளர் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \cdot 4 \times \cdot 7$

$= \cdot 28$

எனவே பிரச்சினை தீர்வதற்கான நிகழ்தகவு $= \cdot 6 + (\cdot 4 \times \cdot 7)$

$= \cdot 6 + \cdot 28$

$= \cdot 88$

(இரண்டாம் ஆராய்ச்சியாளர் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவிலிருந்து ஆரம்பித்தும் கணக்கினைச் செய்யலாம்.)

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒரு பையில் ஐந்து வெள்ளைப் பந்துகளும் மூன்று கருப்புப் பந்துகளும், ஆறு சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒன்றன்பின் ஒன்றாக மூன்று பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. முதல் பந்து சிவப்பாகவும், இரண்டாம் பந்து வெள்ளையாகவும், மூன்றும் பந்து கருப்பாகவும் இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

முதலில் ஒரு சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{6}{14}$

பிறகு வெள்ளைப் பந்து ஒன்றை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{5}{13}$

பின் கருப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{12}$

எனவே சிவப்பு, வெள்ளை, கருப்புப் பந்துகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{3}{12}$

$$= \frac{15}{364}$$

தேற்றம்: ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p எனில், நிகழ்ச்சி நிகழாமற் போவதற்கான நிகழ்தகவு q எனில், n தடவைகளில் r தடவைகள் அந் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $nC_r\, q^{n-r}\, p^r$ ஆகும்.

நிரூபணம் : நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= p$

நிகழ்ச்சி நடைபெருமல் போவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 1 - p = q.$$

r தடவைகள் நிகழ்ந்து, $n - r$ தடவைகள் நிகழாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p^r q^{n-r}$ ஆகும் (பெருக்குத் தேற்றம்). மொத்தத் தடவைகளில் எவையேனும் r தடவைகள் இந்நிகழ்ச்சி நடக்கும். எஞ்சிய $(n - r)$ தடவைகள் நிகழாமலிருக்கும். இவ்வாறு n தடவைகளில் எவையேனும் r தடவைகள் நிகழ்வதற்குரிய வழிகள் nC_r ஆகும். இவையனைத்தும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலின், கூட்டல் தேற்றத்தின்படி, சரியான r தடவைகள் நிகழ்வதற்கும் எஞ்சிய $n - r$ தடவைகள் நிகழாமலிருப்பதற்கும் நிகழ்தகவு $=$ மேற்கண்ட தனித்தனியான nC_r நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் $= nC_r\, p^r\, q^{n-r}$.

கிளைத் தேற்றம் : ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p, தோல்விக்கான நிகழ்தகவு q எனில், n சோதனைகளில் $0, 1, 2, \ldots, n$ வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகள் முறையே $(q + p)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிப்பின் வரிசை உறுப்புகள் ஆகும்.

கிளைத் தேற்றம் : n சோதனைகளில் ஒரு முறையேனும் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= nC_1\, q^{n-1} p + nC_2\, q^{n-2} p^2 + \ldots + p_n$

$$= (q + p)^n - q^n$$

$$= 1 - q^n$$

எடுத்துக்காட்டு 1 : ஒரு பெட்டியில் 9 வெள்ளைப் பந்துகளும், 6 சிவப்புப் பந்துகளுமுள்ளன. ஏதாவதொரு பந்து எடுக்கப்பட்டது. முதலில் எடுத்த பந்தினை மீண்டும் பெட்டியில் போட்டு, மறுபடியும் ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டது. இவ்வாறு நான்கு முறை செய்யப்பட்டது எனில், இந் நான்கு முறைகளுள்.

(i) சரியாக இரண்டு முறை வெள்ளைப் பந்துகளை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(ii) இரண்டு முறையேனும் வெள்ளைப் பந்துகளை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(iii) வெள்ளைப் பந்துகளையே எடுக்காமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

பெட்டியில் மொத்தமுள்ள 15 பந்துகளில் ஒன்பது வெள்ளைப் பந்துகள் இருப்பதாலும், ஒவ்வொரு முறையும் எடுக்கப்பட்ட பந்து மீண்டும் பெட்டியில் போடப்படுவதாலும் வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு (ஒவ்வொரு தடவைக்கும்) $= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

எனவே $p = \frac{3}{5}$; $q = \frac{2}{5}$.

ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதை வெற்றியெனக் குறிப்பிடுவோமானால் $0, 1, 2, \ldots\ldots$ ஆக வெற்றிகள் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் $(\frac{2}{5} + \frac{3}{5})^4$ என்ற ஈருறுப்பு விரிப்பின் உறுப்புகளாகும்.

$$(\tfrac{2}{5} + \tfrac{3}{5})^4 = (\tfrac{2}{5})^4 + 4C_1 (\tfrac{2}{5})^3 (\tfrac{3}{5}) + 4C_2 (\tfrac{2}{5})^2 (\tfrac{3}{5})^2 + 4C_3 (\tfrac{2}{5}) (\tfrac{3}{5})^3 + (\tfrac{3}{5})^4.$$

(i) சரியாக இரு தடவைகளில் வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 4C_2 (\frac{2}{5})^2 (\frac{3}{5})^2$

$$= \frac{216}{625}$$

(ii) இரு முறையேனும் வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு = 2, 3 அல்லது 4 வெற்றிகளின் நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல்

$$= 4C_2 (\tfrac{2}{5})^2 (\tfrac{3}{5})^2 + 4C_3 (\tfrac{2}{5}) (\tfrac{3}{5})^3 + (\tfrac{3}{5})^4.$$

$$= \tfrac{216}{625} + \tfrac{216}{625} + \tfrac{81}{625}$$

$$= \frac{513}{625}$$

(iii) ஒரு வெள்ளைப் பந்தையும் எடுக்காமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= (\frac{2}{5})^4 = \dfrac{16}{325}$

எடுத்துக்காட்டு 2 : நான்கு முகப் பகடைகளைச் சுற்றிவிட, விழும் முகப் புள்ளிகளின் கூடுதல் 12 ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது?

முகப் புள்ளிகளின் கூடுதல் 12 ஆக அமைதற்கான வழிகள்

$$= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4\text{-ல் } x^{12}\text{-ன் கெழு}$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4\text{-ல் } x^8\text{-ன் கெழு}$$

$$= \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4\text{-ல் } x^8\text{-ன் கெழு}$$

$$= (1 - x^6)^4 (1 - x)^{-4}\text{-ல் } x^8\text{-ன் கெழு}$$

$$= (1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}) (1 + 4x$$

$$+ \frac{4.5}{1.2}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \frac{5.6.7}{1.2.3}x^4 + \frac{6.7.8}{1.2.3}x^5 + \ldots)\text{-ல் } x^8\text{-ன் கெழு}$$

$$= \frac{9 \times 10 \times 11}{1 \times 2 \times 3} - 4 \times \frac{4 \times 5}{1 \times 2}$$

$$= 165 - 40$$

$$= 125.$$

நிகழக் கூடிய மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$.

$\therefore$ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{125}{1296}$.

எடுத்துக்காட்டு 3: 2, 4, 3, 1, 5, 0 என்ற ஆறு எண்களைக் கொண்டு நான்கு இடமுள்ள எண் ஒன்று அமைக்கப்படுகின்றது. அவ்வெண் (i) 5ஆல் வகுபட (ii) இரட்டைப் படை எண்ணாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

ஆயிரமாவது இடத்தில் 1, 5, 2, 4, 3 ஆகிய ஐந்து எண்களில் ஏதாவதொன்று இடம் பெறும். எனவே அவ்விடத்தினை 5 வழிகளில் நிரப்பலாம். நூறாவது இடத்தை எந்த எண்ணும் நிரப்பும். எனவே அதனை 6 வழிகளில் நிரப்பலாம். இதுபோன்றே, பத்தாவது, ஒன்றாவது இடங்களை முறையே ஆறு, ஆறு வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே உருவாகும் நான்கு இடமுள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080$.

(i) எண் 5 ஆல் வகுபடவேண்டுமெனில் ஒன்றுவது இடம் 0, 5 ஆகிய இரண்டு எண்களால் மட்டுமே நிரப்பப்பட வேண்டும். எனவே அவ்விடத்தினை இரு வழிகளில் நிரப்பலாம். ஆயிரமாவது இடத்தினை 5 வழிகளிலும், நூறுவது இடத்தை 6 வழிகளிலும், பத்தாவது இடத்தை 6 வழிகளிலும் நிரப்பலாம். எனவே 5ஆல் வகுபடும் எண்கள்

$$= 5 \times 6 \times 6 \times 2 = 360$$

எனவே, நிகழ்தகவு $= \dfrac{360}{1080} = \dfrac{1}{3}$

(ii) எண் இரட்டைப்படை எண்ணுக அமைய ஒன்றுவது இடம் 2, 4, 0 ஆகிய மூன்று எண்களால் மட்டுமே நிரப்பப்பட வேண்டும். எனவே ஒன்றுவது இடம் 3 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். ஆயிரமாவது இடத்தை 5 வழிகளிலும், நூறுவது இடத்தை 6 வழிகளிலும், பத்தாவது இடத்தை 6 வழிகளிலும் நிரப்பலாம்.

எனவே, இரட்டைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= 5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$$

எனவே, இதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{540}{1080} = \frac{1}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒருதலைச் சார்பற்ற 8 நாணயங்கள் ஒரே தடவையில் சுண்டப்பட்டன. (i) சரியாக 5 தலைகள் (ii) மிகுந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

இங்கு $q = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, $n = 8$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு காட்டும் ஈருறுப்பு விரிப்பு $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^8$

(i) சரியாக 5 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= 8C_5\, q^5\, p^3$$

$$= 8C_5\, (\tfrac{1}{2})^5\, (\tfrac{1}{2})^3$$

$$= \frac{56}{256}$$

(ii) மிகுந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு

$= q^8 + 8C_1\, q^7\, p + 8C_2\, q^6\, p^2 + 8C_3\, q^5\, p^3 + 8C_4\, q^4\, p^4.$

$= (\frac{1}{2})^8 + 8C_1\, (\frac{1}{2})^7\, (\frac{1}{2}) + 8C_2\, (\frac{1}{2})^6\, (\frac{1}{2})^2 + 8C_3\, (\frac{1}{2})^5\, (\frac{1}{2})^3 + 8C_4\, (\frac{1}{2})^4\, (\frac{1}{2})^4.$

$= (\frac{1}{2})^8\, [8C_0 + 8C_1 + 8C_2 + 8C_3 + 8C_4]$

$= \frac{163}{256}$

பயிற்சி

1. ஒரு பையில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 5 சிவப்புப் பந்துகளும், 8 நீலப் பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால், இரண்டும் வெள்ளைப் பந்துகளாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

2. நன்கு குலுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 3 சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டன. அவற்றுள் ஒன்று ராஜாவாகவும், மற்றொன்று ராணியாகவும் மற்றது ஏஸாகவும் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

3. 1-லிருந்து 100 வரை குறியிட்ட பரிசுச் சீட்டுகளிலிருந்து 3 சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டன. அம் மூன்று சீட்டுகளும் ஒற்றைப் படை எண்களாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

4. A, B, C... என்ற 10 ஆட்கள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் நிற்கிறார்கள். A-க்கும் B-க்குமிடையே மூன்று பேர்கள் நிற்பதற்கேற்ற நிகழ்தகவு என்ன?

5. இரண்டு அறுமுகப் பகடுகளைச் சுழற்றிவிட்டால் விழும் புள்ளிகளின் கூட்டுத் தொகை 9 ஆக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{9}$ என நிறுவுக.

6. 0, 1, 2, 3, 5 என்ற 5 எண்களைக் கொண்டு 4 இடமுள்ள எண் ஒன்று அமைக்கப்படுகின்றது. அவ்வெண் இரட்டைப் படையாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

7. 0, 2, 4, 6, 9 ஆகிய எண்களைக் கொண்டு 4 இடமுள்ள எண் ஒன்று அமைக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் 5 ஆல் வகுபடுமாறு அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

8. ஒரு கணக்கிற்குத் தீர்வு காண, A-க்கு உரிய நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$; B-க்கு நிகழ்தகவு $\frac{4}{5}$ எனில், இருவரும் முயன்றால் கணக்கிற்குத் தீர்வு காணப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

9. 3 பகடைகளைச் சுற்றிவிட, விழும் முகப் புள்ளிகளின் கூடுதல் 10 ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

10. 'வந்தனம்' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துகள் மாறி மாறி வரிசைப்படுத்தி அமைக்கப்படுகின்றன. 'வ'-ல் தொடங்கி 'ம்'-ல் முடியும் சொல்லைப் பெற நிகழ்தகவு என்ன?

11. நான்கு கருப்புப் பந்துகளும், 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் கொண்ட பைகள் இரண்டு உள்ளன. ஒருவர் முதல் பையில் இருந்து ஒரு பந்தை எடுத்து இரண்டாவது பையில் போட்டு விடுகிறார். பின் இரண்டாவது பையில் இருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கிறார். அப்பந்து வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

12. இரண்டு அறுமுகப் பகடைகளைச் சுற்றிவிட விழும் முகப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 8-க்கு மிகுந்து இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

13. சமச் சீரான 16 நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. (i) சரியாக எட்டுத் தலைகள் (ii) மிகுந்தது 11 தலைகள் விழுவதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

14. பிறப்பு விகிதம் ஆண் : பெண் = 51 : 49. ஒரு மகப் பேறு மருத்துவ மனையில் ஒரே நாளில் பிறந்த 10 குழந்தைகளில் 8 அல்லது 8-க்கு மேற்பட்டவை பெண் குழந்தைகளாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

15. ஒரு கம்பெனியிடம் 5 கப்பல்கள் உள்ளன. ஒரு கடல் பிரயாணத்தில் எந்த ஒரு கப்பலும் சொந்தமாக கவிழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு .001 ஆகும் எனில், (i) ஒரு கப்பல் (ii) மிகுந்தது 2 கப்பல்கள் கவிழ்வதற்கு உள்ள நிகழ்தகவையும், ஒரு கப்பலும் கவிழாமல் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவையும் காண்க.

16. 30 நாட்கள் கொண்ட ஒரு மாதத்தில் 10 நாட்களில் மழை பெய்யும் எனக் கொண்டால் தொடர்ச்சியாக 10 நாட்கள் மழை பெய்யாமல் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

17. ஒரு சோதனை எத்தனைமுறை தோல்வியடைகிறதோ அதைப்போல் 2 மடங்கு தடவைகள் வெற்றியடையும் எனில், 6 தடவைகள் செய்த சோதனையில் 4 தடவைகள் வெற்றியாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

18. ஒரு கப்பல் கவிழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு ·03. 10 கப்பல்கள் பிரயாணத்தைத் தொடங்கினால் (i) 6 கப்பல்கள் பத்திரமாகக் கரை சேருவதற்கு, (ii) குறைந்தது 6 கப்பல்கள் பத்திரமாகக் கரை சேருவதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

19. 100 மின்சார பல்புகள் கொண்ட பெட்டியில் சம வாய்ப்புக் கூறுகளாக எடுக்கப்பட்ட 5 பல்புகளில் எரியாத பல்பு ஒன்றுக்குமேல் இல்லாமலிருந்தால் 100 பல்புகளையும் வாங்கிக் கொள்வதாக ஒருவர் ஒப்புக் கொள்கிறார். பெட்டியில் 10 எரியாத பல்புகள் இருப்பின் அவர் 100 பல்புகளையும் வாங்கிக் கொள்வதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

20. ஒரு கம்பெனியில் பணியாற்றுவோர் 20 பேரில் 5 பேர் பட்டதாரிகள். இவர்களுள் சமவாய்ப்புக் கூறாக 3 பேரைத் தேர்ந்தெடுத்தால் (i) குறைந்தது ஒரு பட்டதாரி (ii) 3 பட்டதாரிகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

21. ஓர் அறையில் 3 பல்புகளைப் பொருத்தலாம். ஒருவர் 10 பல்புகளை வாங்கி, சமவாய்ப்புக் கூறாக மூன்றினை எடுத்துப் பொருத்துகிறார். 10 பல்புகளில் 4 பல்புகள் எரியாத பல்புகள் எனில் அறையில் விளக்கு எரிவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

22. 50 புத்தகங்களுள் 3 மிகச் சிறந்த புத்தகங்களாகும். ஒருவர் அவற்றுள் இங்குமங்குமாக 5 புத்தகங்களை எடுத்துச் செல்கிறார். (i) மூன்று சிறந்த புத்தகங்களையும் எடுக்காமலிருக்கும் நிலை, (ii) மூன்றில் இரண்டு எடுக்கப்பட்டுள்ள நிலை ஆகியவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

6. ஈருறுப்புப் பரவல்
(Binomial Distribution)

§ 6.1. அறிமுகம்

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு p என்றும், நடவாமற் போவதற்கான நிகழ்தகவு q என்றும் கொண்டால் n தடவைகளில் r தடவைகள் அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $nC_r\, p^r\, q^{n-r}$ எனக் கண்டோம். ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதை வெற்றி எனக் கூறலாம். ஒவ்வொரு தடவையும் n சோதனைகளாக N தடவைகள் நடத்தினுல், $N \times nC_r\, p^r\, q^{n-r}$ தடவைகளில் சரியாக r வெற்றிகள் நிகழும். $(q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிப்பின் உறுப்புகள், $0, 1, 2, \ldots\, r$......வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைத் தருமாதலால், n சோதனைகளாக N தடவைகளின் $0, 1, 2, \ldots\ldots r$ ...... வெற்றிகளின் அலைவெண்களை $N\ (q+p)^n$ என்னும் விரிப்பின் உறுப்புகளால் பெறலாம். இவ்வாறு பெறப்படும் பரவலுக்கு ஈருறுப்புப் பரவல் என்பது பெயராகும். ஜேம்ஸ் பெர்நௌலி என்பவர் இதனை முதன் முதலாகக் கண்டார். எனவே இதனைப் "பெர்நௌலிப் பரவல்" என்றும் கூறுவர். இது ஒரு தொடர்பற்ற (Discrete) பரவலாகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலில் எல்லா உறுப்புகளும் N ஆல் பெருக்கப்படுவதாலும், மொத்த அலைவெண் N ஆக இருப்பதாலும், திட்டவிலக்கம், கூட்டுச் சராசரி, போன்றவைகளைக் கணக்கிடும் பொழுது N ஐ விட்டுவிடலாம்.

Nஐத் தவிர்த்து ஈருறுப்புப் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

வெற்றிகளின் (x) எண்ணிக்கை	அலைவெண் $f(x)$
0	q^n
1	$n\,q^{n-1}\,p$
2	$\frac{n(n-1)}{1.2}\,q^{n-2}\,p^2$
3	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,q^{n-3}\,p^3$
....	....
....	....
n	p^n

இனி நமது பாடத்தில் $\Sigma f(x)$ ஐ Σf என்று மட்டுமே எழுதுவோம்.

மூலப் புள்ளியைப் பொருத்து, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_1' = \bar{x} \text{ (கூட்டுச் சராசரி) } = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \Sigma fx.$$

[காரணம் $\Sigma f = (q+p)^n = 1$]

$$= n.q^{n-1}\,p + \frac{n(n-1)}{1}\,q^{n-2}\,p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}\,q^{n-3}\,p^3 + \ldots\ldots + np^n$$

$$= np\,[q^{n-1} + \frac{n-1}{1}\,q^{n-2}.p + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,q^{n-3}\,p^2 + \ldots\ldots + p^{n-1}]$$

$$= np\,[q+p]^{n-1}$$

கூட்டுச் சராசரி $= np$ $[\because q + p = 1]$

$$\mu_2' = \frac{\Sigma f.x^2}{\Sigma f} = \Sigma fx^2$$

$$= nq^{n-1} p + 2n(n-1) q^{n-2} p^2 + \frac{3n(n-1)(n-2)}{1.2} q^{n-3} p^3 + \ldots\ldots + n^2 p^n$$

$$= np\,[q^{n-1} + (1+1)(n-1) q^{n-2} p + \frac{(1+2)(n-1)(n-2)}{1.2} q^{n-3} p^2 + \ldots\ldots + (1 + \overline{n-1}) p^{n-1}]$$

$$= np\,[q^{n-1} + \frac{n-1}{\angle 1} q^{n-2} p + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} q^{n-2} p^2 + \ldots\ldots + p^{n-1}]$$

$$+ np\,[(n-1) q^{n-2} p + \frac{(n-1)(n-2)}{1} q^{n-3} p^2 + \ldots + (n-1) p^{n-1}]$$

$$= np\,(q+p)^{n-1} + np\,(n-1)\,p\,[q^{n-2} + \frac{n-2}{1} q^{n-3} p + \ldots + p^{n-2}]$$

$$= np\,(q+p)^{n-1} + n(n-1)\,p^2 (q+p)^{n-2}$$

$$= np + n(n-1)\,p^2 \quad (\because q+p = 1)$$

$$\sigma^2 = \mu_2' - \bar{x}^2$$

$$= n(n-1)\,p^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np\,(1-p) = npq$$

எனவே திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{npq}$

மேலும் $\mu_2' = \dfrac{\Sigma f\,x^2}{\Sigma f} = \Sigma f\,x^2 = \Sigma f\,[x(x-1) + x]$

$$= \Sigma f\,x(x-1) + \Sigma f\,x$$

இதில் முதல் உறுப்பு $= \Sigma\, nC_x\, q^{n-x}\, p^x\, x\,(x-1)$

$$= n\,(n-1)\,p^2\, \Sigma\, {}^{n-2}C_{x-2}\, q^{n-x}\, p^{x-2}$$

$$= n\,(n-1)\,p^2\,(q+p)^{n-2}$$

$$= n\,(n-1)\,p^2$$

இரண்டாவது உறுப்பு $\Sigma f\, x = np$ என முன்பே கண்டோம்.

எனவே $\mu_2' = n\,(n-1)\,p^2 + np$ என்பதை அறியலாம்.

$$\mu_3' = \frac{\Sigma f\, x^3}{\Sigma f} = \Sigma f\, x^3$$

$$= \Sigma f\,[x\,(x-1)\,(x-2) + 3\,x\,(x-1) + x]$$

$$= \Sigma f\,(x)\,(x-1)\,(x-2) + 3\,\Sigma f\, x\,(x-1) + \Sigma f\,(x)$$

முதல் உறுப்பு $= \Sigma\, nC_x\, q^{n-x}\, p^x\, x\,(x-1)\,(x-2)$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3\, \Sigma\, {}^{n-3}C_{x-3}\, q^{n-x}\, p^{x-3}$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3\,(q+p)^{n-3}$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3$$

மற்ற உறுப்புகள் தெரிந்தவையே.

எனவே μ_3' = மூன்றும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3 + 3\,n\,(n-1)\,p^2 + np.$$

இனி,

$$\mu_4' = \frac{\Sigma f\, x^4}{\Sigma f}$$

$$= \Sigma f\, x^4$$

$$= \Sigma f\,[x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) + 6\,x\,(x-1)\,(x-2) + 7\,x\,(x-1) + x]$$

$$= \Sigma f\, x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) + 6\,\Sigma f\, x\,(x-1)\,(x-2) + 7\,\Sigma f\, x\,(x-1) + \Sigma f\,(x)$$

முதல் உறுப்பு $= \Sigma\, nC_x\, q^{n-x}\, p^x\, x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4 \;\Sigma\, {}^{n-4}C_{x-4}\, q^{n-x}\, p^{x-4}$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4\,(q+p)^{n-4}$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4$$

மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் தெரிந்தவையே.

எனவே, $\mu_4' =$ நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4 + 6n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3 + 7n\,(n-1)\,p^2 + np.$$

கூட்டுச் சராசரியைப் பொறுத்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிட்டால்,

$\mu_1 = \mu_1' - d = 0.$ எனவே $d = \mu_1' = np$

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mu_2' - d^2\\ &= n\,(n-1)\,p^2 + np - n^2\,p^2\\ &= np\,(1-p)\\ &= npq.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \mu_3' - 3\mu_2'\,d + 2d^3\\ &= n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3 + 3n\,(n-1)\,p^2 + np - 3np\,[n\,(n-1)\,p^2 + np] + 2n^3\,p^3\\ &= 2np^3 - 3p^2\,n + np\\ &= np\,(2p^2 - 3p + 1)\\ &= np\,(p-1)\,(2p-1)\\ &= np\,(-q)\,(p-q)\\ &= (npq)\,(q-p)\end{aligned}$$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\,d + 6\mu_2'\,d^2 - 3d^4$

மதிப்புகளைப் பொருத்திச் சுருக்கினால்,

$$\begin{aligned}\mu_4 &= (3n^2 - 6n)\,p^4 + (12n - 6n^2)\,p^3 + (3n^2 - 7n)\,p^2 + np\\ &= np\,[3p^2\,(n-2)\,(p-2) + p\,(3n-6) + (1-p)]\\ &= np\,[3p\,(n-2)\,\{(p-2)\,p + 1\} + q]\end{aligned}$$

$$= np\,[3p\,(n-2)\,q^2 + q]$$

$$= npq\,[3\,(n-2)\,pq + 1]$$

$$= 3n^2p^2q^2 + npq\,(1-6pq)$$

$$= 3\mu_2{}^2 + \mu_2\,(1-6pq)$$

கிளைத் தேற்றம் 1: $\beta_1 = \frac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^2} = \frac{n^2p^2q^2\,(q-p)^2}{n^3p^3q^3} = \frac{(q-p)^2}{npq}$

$$\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1} = \pm\,\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

γ_1 கோட்டளவை என நாம் அறிவோம். $p=q$ எனும்பொழுது கோட்டளவை பூச்சியமாகி வரையானது சமச்சீர் பெறுகிறது. p-ம், q-ம் சமமாக இல்லாவிடில் கோட்டளவை $q-p$ ஐப் பொறுத்தது. $q-p$-ன் மதிப்பு அதிகமானுல் கோட்டளவையும் அதிகமாகும். $p < \frac{1}{2}$ எனில் கோட்டளவை நேர்மறையாகும்; $p > \frac{1}{2}$ எனில் கோட்டம் எதிர்மறையாகும். $p \neq q$ என்ருல், n-ன் மதிப்பு மிகப் பெரியதாக இருப்பின், β_1 பூச்சியத்திற்குத் தோராய மாகும். அதாவது மிகப் பெரிய n-க்கு வரை சமச்சீராகிறது என அறிகிரோம்.

கிளைத் தேற்றம் 2: $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = 3 + \frac{1-6\,pq}{npq}$

மிகப் பெரிய n-க்குக் கடைசி உறுப்பு பூச்சியமாகி, ஈருறுப்புப் பரவலின் தட்டை அளவை 3-க்குத் தோராயமாகிவிடுகிறது. n முடிவிலி ஆனுல், ஈருறுப்புப் பரவல், ஓர் இயல் பரவலாகும் என் பதைப் பின்னுல் காண்போம்.

§ 6.2. விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை உருவாக்கும் சார்பு

x என்ற மாறியின் அலைவுச் சார்பு $f(x)$ எனில்,

$M(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x}\,f(x)$ என்பது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைச் சார்பு எனப்படும். இங்கு வலப்பக்கம் ஓர் ஒருங்குத் தொடராகக் (Convergent series) கொள்ளப்படுகின்றது. இதை விரித்தால்,

$$M(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty}\left[1 + \frac{\theta x}{\angle 1} + \frac{\theta^2 x^2}{\angle 2} + \cdots\cdots\cdots\right] f(x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} f(x) + \frac{\theta}{\angle 1}\sum_{0}^{\infty} x\, f(x) + \frac{\theta^2}{\angle 2}\sum_{0}^{\infty} x^2 f(x) + \ldots\infty$$

$$= 1 + \frac{\theta}{\angle 1}\mu_1' + \frac{\theta^2}{\angle 2}\mu_2' + \frac{\theta^3}{\angle 3}\mu_3' + \cdots\cdots\cdots \infty$$

இங்கு $\sum_{0}^{\infty} f(x) = 1;$ μ_1', μ_2' ...... என்பன மூலப் புள்ளியைப் பொறுத்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்.

$$M(\theta) = 1 + \frac{\theta}{\angle 1}\mu_1' + \frac{\theta^2}{\angle 2}\mu_2' + \frac{\theta^3}{\angle 3}\mu_3' + \cdots\cdots\cdots \infty$$

θ ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்த,

$$\frac{dM}{d\theta} = \mu_1' + \frac{\theta}{\angle 1}\mu_2' + \frac{\theta^2}{\angle 2}\mu_3' + \cdots\cdots\cdots \infty$$

$\theta = 0$ எனில், $\left(\frac{dM}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \mu_1'$.

மறுபடியும் θ ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்த,

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} = \mu_2' + \theta\,\mu_3' + \cdots\cdots\cdots$$

$\theta = 0$ எனில்,

$$\left(\frac{d^2 M}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = \mu_2'$$

பொதுவாக, $\left(\frac{d^k M}{d\theta^k}\right)_{\theta=0} = \mu_k'$

§ 6.3. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை சார்புவழி ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

ஈருறுப்புப் பரவலில் அலைவுச் சார்பு $= nC_x\, q^{n-x}\, p^x$

எனவே, $M(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} nC_x\, q^{n-x}\, p^x\, e^{\theta x}$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} nC_x \, q^{n-x} \left(pe^{\theta} \right)^x$$

$$= \left(q + pe^{\theta} \right)^x$$

$$\frac{dM}{d\theta} = n \left(q + pe^{\theta} \right)^{n-1} . \, pe^{\theta}$$

$$\mu_1{}' = \left(\frac{dM}{d\theta} \right)_{\theta = 0} = np \, (q+p)^{n-1}$$

$$= np$$

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} = np \left[e^{\theta} \, (n-1) \left(q + pe^{\theta} \right)^{n-2} pe^{\theta} + \left(q+pe^{\theta} \right)^{n-1} e^{\theta} \right]$$

$$\mu_2{}' = \left(\frac{d^2 M}{d\theta} \right)_{\theta = 0}$$

$$= np \, [\, (n-1) \, p + 1 \,]$$

$$= n(n-1) \, p^2 + np$$

$$\mu_2{}' = n(n-1) \, p^2 + np$$

இதே முறையில் மூன்றும், நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காணலாம்.

§ 6.4. ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடு

t_r என்பது ஈருறுப்புப் பரவலின் r ஆவது உறுப்பு என்க.

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{nC_r \, q^{n-r} \, p^r}{nC_{r-1} \, q^{n-r+1} \, p^{r-1}}$$

$$= \frac{n - r + 1}{r} \times \frac{p}{q}$$

$\therefore \; \dfrac{n - r + 1}{r} \times \dfrac{p}{q} \gtreqless 1$ என்பதற்கேற்ப, $\dfrac{t_{r+1}}{t_r} \gtreqless 1$

$\therefore \; (n - r + 1) \, p \gtreqless rq$ என்பதற்கேற்ப, $t_{r+1} \gtreqless t_r$

$(n + 1) \, p \gtreqless r \, (p+q)$ என்பதற்கேற்ப, $t_{r+1} \gtreqless t_r$

அதாவது $(n+1)\,p \gtreqless r$ என்பதற்கேற்ப, $t_{r+1} \gtreqless t_r$

$r \lesseqgtr (n+1)\,p$ என்பதற்கேற்ப, $t_{r+1} \gtreqless t_r$.

வகை 1: $(n+1)\,p$ ஒரு முழு எண்ணுக இல்லாவிடில்,

$(n+1)\,p = I$ (முழு எண்) $+\ F$ (தகு பின்னம்) என்க.

$r = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots I \ldots\ldots\ldots$ என்றுல்,

$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots\ldots\ldots < t_{r-1} < t_I < t_{I+1} > t_{I+2} > \ldots\ldots\ldots$ என்பது தெளிவு.

எனவே $x = I$-க்கு ஏற்ற $I+1$ ஆவது உறுப்பு மிகப் பெரிய தாகும். எனவே $x = I$-ல் பரவலின் முகடு உள்ளது என அறிகின்றோம்.

வகை 2: $(n+1)\,p = I'$ (ஒரு முழு எண்) எனில், மேற்கூறிய வாறே $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots\ldots\ldots < t_{I'} = t_{I'+1} > t_{I'+2} > \ldots\ldots\ldots$

இங்கு x-க்கு $I' - 1$, $x = I'$-க்கு ஏற்ற இரு உறுப்புகள் உள்ளன. $x = I' - \frac{1}{2}$-ல் முகடு உள்ளதாகக் கொள்வது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $p = \cdot 3$ எனும்பொழுது $10{,}000\,(q+p)^{20}$ என்ற ஈருறுப்புப் பரவலின் அலைவெண்ணைக் கணக்கிடுக. (ஈருறுப்புப் பட்டியலை அல்லது மிகைப் (லாக்—Log) பட்டியலைப் பயன்படுத்துக.)

ஈருறுப்புப் பரவலின் அலைவெண்கள் $10{,}000\ (\cdot 7 + \cdot 3)^{20}$-ன் விரிப்பால் பெறப்படும்.

$$10{,}000\ (\cdot 7+\cdot 3)^{20} = 10{,}000\ \left[(\cdot 7)^{20} + 20C_1\ (\cdot 7)^{19}\ (\cdot 3) + 20C_2\,(\cdot 7)^{18}\,(\cdot 3)^2 + \ldots\ldots\ldots + (\cdot 3)^{20}\right]$$

ஈருறுப்புப் பட்டியல் என்ற புள்ளியியல் பட்டியலைப் பயன் படுத்திக் கணக்கிடுதல் முறை. லாக் பட்டியலைப் பயன்படுத்தியும் கணக்கிடலாம். எனவே, இரு வழிகளிலும் கணக்கிடலாம்.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	அலைவெண்கள் [10000 $(\cdot 7+\cdot 3)^{20}$-க்கான அலைவெண்]
0	8
1	68
2	278
3	716
4	1304
5	1788
6	1916
7	1644
8	1144
9	654
10	308
11	120
12	40
13	10
15	2
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

எடுத்துக்காட்டு 2: ஒரு நகரில், மக்கள் தொகையில் 30% பேர் குடிசை வாழ்வோர். அதாவது ஒருவர் குடிசை வாழ்வோராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு = ·3. 50 ஆராய்ச்சியாளர்கள் அந் நகரில் 8 பேர்களிடம், குடிசை வாழ்வோரா இல்லையா என அறியச் சென்றனர். இரண்டு அல்லது இரண்டிற்குக் கீழ் குடிசை வாழ் வோரைச் சந்தித்த ஆராய்ச்சியாளர்கள் எத்தனை பேர் ?

குடிசை வாழ்வோரைச் சந்தித்தலை வெற்றி எனக் கொள் வோம். வெற்றிகளின் ஈருறுப்புப் பரவல் = $50\,[\cdot 7 + \cdot 3]^{8}$

$$= 50\,[(\cdot 7)^8 + 8C_1(\cdot 7)^7(\cdot 3) + 8C_2(\cdot 7)^6(\cdot 3)^2 + 8C_3(\cdot 7)^5(\cdot 3)^3 + 8C_4(\cdot 7)^4(\cdot 3)^4 + 8C_5(\cdot 7)^3(\cdot 3)^5 + 8C_6(\cdot 7)^2(\cdot 3)^6 + 8C_7(\cdot 7)(\cdot 3)^7 + (\cdot 3)^8\,]$$

0, 1, 2 வெற்றிகளின் அலைவெண்களின் கூடுதல் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதலேயாகும்.

அதாவது $= 50\,[(\cdot 7)^8 + 8(\cdot 7)^7(\cdot 3) + 28(\cdot 7)^6(\cdot 3)^2]$

$= 2\cdot 877 + 9\cdot 883 + 14\cdot 81$

$= 27\cdot 570$

$= 28$ (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 3 : பெண் குழந்தை பிறப்பதற்கான நிகழ் தகவு $= \cdot 49$. ஒரு நகர மருத்துவமனையில் ஒரு நாள் 8 குழந்தை கள் பிறந்தன. அவைகளுள் 6 அல்லது 6-க்கு மேற்பட்டவை பெண் குழந்தைகளாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

இங்கு, பெண் குழந்தை பிறப்பதை வெற்றி எனக் கொள் வோம்.

$p =$ வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு $= \cdot 49$

$q =$ தோல்விக்கான நிகழ்தகவு $= \cdot 51$

இதற்குரிய ஈருறுப்புப் பரவல் $= (q+p)^8 = (\cdot 51 + \cdot 49)^8$

$$= (\cdot 51)^8 + 8C_1(\cdot 51)^7(\cdot 49) + 8C_2(\cdot 51)^6(\cdot 49)^2 + 8C_3(\cdot 51)^5(\cdot 49)^3 + 8C_4(\cdot 51)^4(\cdot 49)^4 + 8C_5(\cdot 51)^3(\cdot 49)^5 + 8C_6(\cdot 51)^2(\cdot 49)^6 + 8C_7(\cdot 51)(\cdot 49)^7 + (\cdot 49)^8$$

6 அல்லது 6-க்கு மேற்பட்ட பெண் குழந்தைகள் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 8C_6(\cdot 51)^2(\cdot 49)^6 + 8C_7(\cdot 51)(\cdot 49)^7 + (\cdot 49)^8$

$= \cdot 1008 + \cdot 02768 + \cdot 003324$

$= \cdot 1318$

எடுத்துக்காட்டு 4: கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில், அதே கூட்டுச் சராசரி கொண்ட ஓர் ஈருறுப்பைக் காண். கணக்கியல் அலைவெண்களைக் கண்டு அதன் திட்ட விலக்கங்களை ஒப்பு நோக்கு.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	கண்ட அலைவெண்
0	2
1	5
2	7
3	4
4	1
5	1
மொத்தம்	20

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{0\times 2 + 1\times 5 + 2\times 7 + 3\times 4 + 4\times 1 + 5\times 1}{20}$

$$= \frac{0 + 5 + 14 + 12 + 4 + 5}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

$$s^2 = \frac{0^2\times 2 + 1^2\times 5 + 2^2\times 7 + 3^2\times 4 + 4^2\times 1 + 5^2\times 1}{20}$$

$$= \frac{0 + 5 + 28 + 36 + 16 + 25}{20}$$

$$= \frac{110}{20}$$

$$= 5{\cdot}5.$$

$$\sigma^2 = s^2 - \bar{x}^2$$

$$= 5{\cdot}5 - 4$$

$$= 1{\cdot}5$$

இதற்கான ஈருறுப்புப் பரவல் மொத்த அலைவெண் $N = 20$ ஆகவும், கூட்டுச் சராசரி $np = 2$, $(n = 5)$ ஆகவும் கொண்டதாக இருக்கவேண்டும்.

$p = \dfrac{2}{5} = {\cdot}4$; எனவே $q = {\cdot}6$

ஆகையால் ஈருறுப்புப் பரவல் $= 20\,({\cdot}6 + {\cdot}4)^5$

இதை விரித்தால் ஈருறுப்புப் பரவலின் அலைவெண்கள் கிடைக்கும்.

அதாவது $20\,[(\cdot 6)^5 + 5C_1(\cdot 6)^4(\cdot 4) + 5C_2(\cdot 6)^3(\cdot 4)^2 + 5C_3(\cdot 6)^2(\cdot 4)^3 + 5C_4(\cdot 6)(\cdot 4)^4 + (\cdot 4)^5]$

$$= 20\,[0\cdot 07776 + 0\cdot 2592 + 0\cdot 3456 + 0\cdot 2304 + 0\cdot 0768 + 0\cdot 01024]$$

$$= 1\cdot 6 + 5\cdot 2 + 6\cdot 9 + 4\cdot 6 + 1\cdot 5 + 0\cdot 2$$

கணக்கியல் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{npq}$

$$= \sqrt{5 \times \cdot 4 \times \cdot 6}$$

$$= \sqrt{1\cdot 2} = 1\cdot 1$$

இது மேற்கண்ட திட்ட விலக்கத்தோடு ஒப்பு நோக்கத் தக்கது.

எடுத்துக்காட்டு 5 : கூட்டுச் சராசரி 4, மாறுபாடு (Variance) $1\frac{1}{3}$ எனக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் காண்க. அதன் முகடு என்ன ?

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 4$, அதாவது $np = 4$

$\sigma = \frac{4}{3}$, அதாவது $npq = 4/3$

எனவே $q = \frac{1}{3}$. அப்பொழுது $p = \frac{2}{3}$

$n = 6$ ஆகிறது.

∴ பரவல் $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})^6$ என்பதாகும்.

$$(n+1)\,p = 7 \times \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

எனவே முகடு = 4.

பயிற்சி

1. ஒரு நகர மக்களுள் 20% எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்கள். 100 ஆராய்ச்சியாளர்கள் அந் நகரில் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர்

கள் யார், எழுதப் படிக்கத் தெரியாதவர்கள் யார் என அறியச் சென்றனர். 3 அல்லது 3-க்குக் கீழ் எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவரைச் சந்தித்த ஆராய்ச்சியாளர் எத்தனை பேர்?

2. கீழ்க்கண்ட பட்டியல், சில மாணவர்கள் 4 தேர்வுகளில் வெற்றியடைந்த விவரத்தைக் கூறுகிறது. ஏற்ற ஈருறுப்புப் பரவலை அமைக்கவும். கணக்கியல் அலைவெண்களைக் கணக்கிடவும்.

தேர்வுகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
அலைவெண்	4	10	15	9	2

3. ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 200 ஸ்குரு ஆணிகள் கொண்ட 10 பெட்டிகள் வாங்கப்பட்டன. 2% குறைபாடுடைய ஆணிகள் உள்ளன எனில் வாங்கப்பட்ட பெட்டிகளுள் 8 பெட்டிகள் குறைபாடுடைய ஆணிகள் 2-க்குக் (இரண்டிற்கு) கீழே கொண்டிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

4. சமச்சீரான 6 நாணயங்கள் 640 தடவைகள் சுண்டப்பட்டன.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6
அலைவெண்	7	64	140	210	132	75	12

ஈருறுப்புப் பரவல் அமைத்து, கணக்கியல் அலைவெண்களைக் காண்க.

5. கூட்டுச் சராசரி 4, மாறுபாடு 3 எனக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் காண்க. அதன் முகடு என்ன?

6. ஒரு தொடர்ச்சியற்ற மாறி 0, 1, 2 ..... n என்ற மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. அவைகளின் அலைவெண்கள் முறையே

$1, n, nC_2 \ldots\ldots n, 1$ என்பனவற்றை ஒரே நிலை உறுப்பால் பெருக்கப் பெறப்படும் எண்களாகும். கூட்டுச் சராசரி $= \frac{n}{2}$; திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{\frac{n}{2}}$ என நிறுவுக.

7. ஒருதலைச் சார்பற்ற நல்ல நாணயம் ஒன்றினை 10 தடவைகள் சுண்டுவது ஒரு சோதனை எனக் கொண்டு, 100 சோதனைகள் மேற்கொள்ளப்பட்டால் குறைந்தது 7 தலைகளாவது எத்தனை சோதனைகளில் விழும்?

8. ஒரு பெட்டியில் 12 வெள்ளைப் பந்துகளும், 24 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. 10 பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்ருக எடுக்கப் படுகின்றன (ஒவ்வொரு பந்தும் மீண்டும் பெட்டியில் போடப் பட்டு) எனில், இவற்றுள் 6 வெள்ளைப் பந்துகளாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

7. பாய்ஸான் பரவல்
(Poisson Distribution)

§ 7.1. அறிமுகம்

ஈருறுப்புப் பரவலில், np ஒரு முடிவுள்ளதாக இருக்கவேண்டும் என்ற நிபந்தனையோடு, p குறைந்தும், n அதிகமாகவும் இருந்தால் புதியதொரு பரவலைப் பெறுவோம். அதைப் பாய்ஸான் பரவல் என்போம். p ஆனது மிகச் சிறியதெனில், நிகழ்ச்சிக்குரிய வாய்ப்பு மிகச் சிறியதெனப் பொருளாகும். விபத்துகளால் ஏற்படும் இறப்பு போன்ற நிகழ்ச்சிகள் நகரில் ஒவ்வொரு நாளும் நிகழ்வதில்லை. எப்பொழுதோ ஒரு முறை ஏற்படுகின்ற அரிய நிகழ்ச்சிகளை நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் காண்கிறோம் அல்லவா? இவ்விதம் விபத்துகளால் ஏற்படும் இறப்புகளை, ஒரு நாளைக்கு இத்தனை இறப்புகள் நிகழ்கின்றன என்று கணக்கிட்டு, அலைவுப் பரவலாக எழுதுவோம். அதில் ஒரு நாளைக்கு 0, 1, 2 ....இறப்புகளின் அலைவெண்களைக் குறிப்பிடுவோம். இதைச் சற்று உற்று நோக்கினால் பரவலின் கோட்டளவை மிக உயர்ந்ததாக இருத்தலை அறிய முடியும். இதில் 0, 1, 2 இறப்புகளுக்கெதிரே அதிகமான அலைவெண்கள் இருத்தலையும், அடுத்த ஒன்றிரண்டு பிரிவுகளில் அலைவெண் அநேகமாகப் பூச்சியமாகி விடுதலையும் காணலாம். இத்தகு பரவலும் ஓர் ஒழுங்கு நியதியில் அமைகிறது. கணக்கியல் பரவலாக அமையும் இதைத்தான் பாய்ஸான் பரவல் என்கிறோம்.

நேர்த்தியான பொருள்களை உருவாக்கும் ஓர் இயந்திரம் சில சமயம் குறைபாடுடைய பொருள்களையும் உருவாக்குவதுண்டு. குறைபாடுடைய பொருள்கள் இரண்டு அல்லது மூன்று சதவீதம் இருக்கலாம். உருவாக்கப்பட்ட 100 பொருள்களில் இரண்டு அல்லது மூன்று பொருள்கள் குறைபாடுடையனவாக இருக்கலாம் ஒவ்வொன்றிலும் 100 பொருள்கள் கொண்ட 500 பெட்டிகளை எடுத்துக்கொண்டால், சில பெட்டிகளில் குறைபாடுடைய பொருள்

களே இல்லாமலிருக்கலாம். சிலவற்றுள் குறைபாடுடைய பொருள் ஒன்றிருக்கலாம். சிலவற்றுள் இரண்டிருக்கலாம். இவ்வகையில் அமையும் பரவல் பாய்ஸான் விதிப்படி இருத்தலைக் காணலாம். புள்ளியியலில் தரக் கட்டுப்பாட்டில் இது பயன்படுகிறது.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனில், n தேர்வுகளில் x வெற்றிகளின் அலைவெண் $nC_x\, q^{n-x}\, p^x$ ஆகும். x-க்கு ஒப்பு நோக்க n பெரியதாகையால், $n-1, n-2, \ldots\ldots, n-x+1, n-x$ ஆகிய யாவற்றிற்கும் n ஐயே பொருத்தலாம். (இது ஒரு தோராயமாகும்.)

x வெற்றிகளுக்கு அலைவுச் சார்பு

$$f(x) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-x+1)}{\angle x} q^{n-x} p^x$$

$$= \frac{n.n.n\ldots\ldots\ldots n}{\angle x} q^n\ p^x.$$

$$= \frac{n^x.p^x}{\angle x} q^n\ p^x$$

$$= \frac{(n.p)^x}{\angle x} q^n$$

$np = m$ எனில்,

$$f(x) = \frac{m^x}{\angle x}(1-p)^n$$

$$= \frac{m^x}{\angle x}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n$$

$$= \frac{m^x}{\angle x} e^{-m} \quad \left(\because \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \left(1-\frac{1}{m}\right)^n = e^{-m}\right)$$

எனவே, பாய்ஸான் பரவலில் x வெற்றிகளுக்குரிய அலைவுச் சார்பு $e^{-m}\,\dfrac{m^x}{\angle x}$ ஆகும்.

$x = 0, 1, 2\ \ldots\ldots$ என்றால், நமக்கு $0, 1, 2\ \ldots\ldots$ வெற்றிகளுக்கான அலைவெண்கள் கிடைக்கின்றன.

$n \to \infty$ ஆதலின் பரவலில் முடிவற்ற உறுப்புகளிருக்கும்.

எனவே, பரவல் $\sum_{0}^{\infty} \frac{m^x}{\angle x} e^{-m} = e^{-m}\left[1 + \frac{m}{\angle 1} + \frac{m^2}{\angle 2} + \ldots \infty\right]$

ஆகிறது.

$$= e^{-m} \cdot e^{m}$$

$$= e^{o}$$

$$= 1$$

எனவே மொத்த அலைவெண் $N = 1$

§ 7.2. பாய்ஸான் பரவலில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

மூலப் புள்ளியைப் பொறுத்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிட்டால் $\bar{x} = \mu_1' = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \Sigma fx$ ($\because \Sigma f = 1$ எனக் கண்டோம்.)

$$= e^{-m}\left[0.1 + \frac{1.m}{\angle 1} + \frac{2.m^2}{\angle 2} + \frac{3.m^3}{\angle 3} + \ldots\right]$$

$$= me^{-m}\left[1 + \frac{m}{\angle 1} + \frac{m^2}{\angle 2} + \frac{m^3}{\angle 3} + \ldots\right]$$

$$= me^{-m} \cdot e^{m}$$

$$= m \cdot e^{o} = m$$

s^2 (மூலப்புள்ளியைப் பொறுத்து) $= \mu_2'$

$$= \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f}$$

$$= \Sigma fx^2$$

$$\text{அதாவது } s^2 = e^{-m}\left[0^2.1 + \frac{1^2.m}{\angle 1} + \frac{2^2.m^2}{\angle 2} + \frac{3^2.m^3}{\angle 3} + \ldots\right]$$

$$= e^{-m}\left[m + \frac{2m^2}{\angle 1} + \frac{3m^3}{\angle 2} + \frac{4m^4}{\angle 3} + \ldots\right]$$

$$= e^{-m}\left[m + \frac{(1+1)m^2}{\angle 1} + \frac{(1+2)m^3}{\angle 2} + \frac{(1+3)m^4}{\angle 3} + \ldots\right]$$

$$= e^{-m}\left[m\left(1 + \frac{m}{\angle 1} + \frac{m^2}{\angle 2} + \ldots\right) + m^2\left(1 + \frac{m}{\angle 1} + \frac{m^2}{\angle 2} + \ldots\right)\right]$$

$$= e^{-m}(me^m + m^2 e^m)$$

$$= e^{-m} e^m (m + m^2)$$

$$= (m + m^2)$$

$$\text{எனவே } \sigma^2 = s^2 - \bar{x}^2$$

$$= (m + m^2) - m^2 = \mathbf{m}$$

எனவே பாய்ஸான் பரவலில் மாறுபாடு (Variance) = கூட்டுச் சராசரி ((Mean) ஆகும்.

இதே முறையில் μ_3' ஐயும், μ_4' ஐயும் கணக்கிடலாம். அவற்றினின்று μ_3, μ_4 ஐயும் காணலாம்.

வேறொரு முறை : (Σ என்றால் சிறிய உறுப்பிலிருந்து முடிவற்ற உறுப்புகளின் கூடுதல் என்பது பொருள்) x மாறி எனும்பொழுது

$$\mu_1' = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \Sigma fx$$

$$= \sum \frac{x e^{-m} m^x}{\angle x}$$

$$= m e^{-m} \sum \frac{m^{x-1}}{\angle x-1}$$

$$= m e^{-m} e^m = me^0 = \mathbf{m}$$

$$\mu_2' = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} = \Sigma fx^2$$

$$= \Sigma f [x (x - 1) + x]$$

$$= \Sigma fx (x - 1) + \Sigma f x$$

முதல் உறுப்பு $= \sum \frac{e^{-m} m^x}{\angle x} x (x - 1)$

$$= m^2 e^{-m} \sum \frac{m^{x-2}}{\angle \underline{x-2}}$$

$$= m^2 e^{-m} e^m = m^2$$

இரண்டாம் உறுப்பு $= m$ என்பது தெளிவு.

எனவே $\mu_2' = m^2 + m$

$$\mu_3' = \frac{\Sigma fx^3}{\Sigma f} = \Sigma fx^3$$

$$= \Sigma f [x (x-1) (x-2) + 3x (x-1) + x]$$

$$= \Sigma fx (x-1) (x-2) + 3 \Sigma fx (x-1) + \Sigma fx$$

முதல் உறுப்பு $= \sum \frac{e^{-m} m^x}{\angle x} x (x-1) (x-2)$

$$= m^3 e^{-m} \sum \frac{m^{x-3}}{\angle \underline{x-3}}$$

$$= m^3 e^{-m} . e^m$$

$$= m^3.$$

மற்ற உறுப்புகள் யாவும் தெரிந்தவையே.

எனவே $\mu_3' = m^3 + 3m^2 + m$

$$\mu_4' = \frac{\Sigma fx^4}{\Sigma f} = \Sigma fx^4$$

$$= \Sigma f [x (x-1) (x-2) (x-3)$$
$$+ 6x (x-1) (x-2)$$
$$+ 7x (x-1) + x]$$

$$= \Sigma f x (x-1)(x-2)(x-3) + 6 \Sigma f x (x-1)(x-2) + 7 \Sigma f x (x-1) + \Sigma f x$$

முதல் உறுப்பு $= \sum \frac{e^{-m} m^x}{\angle x} x (x-1)(x-2)(x-3)$

$$= e^{-m} m^4 \sum \frac{m^{x-4}}{\angle \underline{x-4}}$$

$$= e^{-m} m^4 . e^m$$

$$= m^4$$

மற்ற உறுப்புகள் யாவும் தெரிந்தவையே.

எனவே, $\mu_4' = \mathbf{m}^4 + 6\mathbf{m}^3 + 7\mathbf{m}^2 + \mathbf{m}$.

ஆகையால் $\mu_1' = \bar{x} - d$ (மூலப்புள்ளியிலிருந்து விலகல்) $= m$.

$$\sigma^2 = \mu_2 = \mu_2' - d^2$$

$$= m^2 + m - m^2$$

$$= \mathbf{m}$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3 \mu_2' d + 2d^3$$

$$= (m^3 + 3m^2 + m) - 3(m^2+m) m + 2m^3$$

$$= \mathbf{m}$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4 \mu_3' d + 6 \mu_2' d^2 - 3d^4$$

$$= (m^4 + 6m^3 + 7m^2 + m) - 4m(m^3 + 3m^2 + m) + 6m^2(m^2 + m) - 3m^4$$

$$= 3m^2 + m.$$

எனவே $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{\mathbf{m}}$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3m^2 + m}{m^2} = 3 + \frac{1}{\mathbf{m}}$$

§ 7.3. பாய்ஸான் பரவலில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை உருவாக்கும் சார்பு

பாய்ஸான் பரவலில் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை

உருவாக்கும் சார்பானது $(M\theta) = \sum_{0}^{\infty} e^{\theta x} \frac{m^x}{\angle x} e^{-m}$

$$= e^{-m} \sum_{0}^{\infty} \frac{\left(me^{\theta}\right)^x}{\angle x}$$

$$= e^{-m} e^{me^{\theta}}$$

$$\left(\frac{dM}{d\theta}\right) = e^{-m}.\ e^{me^{\theta}}.\ m.\ e^{\theta}$$

மூலப்புள்ளியைப் பொருத்து, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_1' = \left(\frac{dM}{d\theta}\right)_{\theta=0} = e^{-m}.\ e^{m}.\ m = \mathrm{m}$$

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} = e^{-m}\left[m^2 e^{2\theta}\ .e^{me^{\theta}} + me^{me^{\theta}}.\ e^{\theta}\right]$$

$$= m.\ e^{-m}.\ e^{\theta}\left[me^{\theta} + 1\right] e^{me^{\theta}}$$

$$\mu_2' = \left(\frac{d^2 M}{d\theta}\right)_{\theta=0} = me^{-m}\,(1)\,(m+1)\,e^{m} = m(m+1)$$

$$= m^2 + m.$$

மறுபடியும் வகைப்படுத்த,

$$\frac{d^3 M}{d\theta^3} = me^{-m}.\ e^{\theta}.\ e^{me^{\theta}}\left[m^2 e^{2\theta} + 3\ me^{\theta} + 1\right]$$

$$\mu_3' = \left(\frac{d^3 M}{d\theta^3}\right)_{\theta=0} = m.\ e^{-m}.\ 1.\ e^{m}\,[m^2 + 3m + 1]$$

$$= m^3 + 3m^2 + m$$

இதேபோன்று μ_4' ஐயும் கணக்கிடலாம்.

§ 7.4. பாய்ஸான் பரவலில் கோட்டளவை, தட்டை அளவை

$\beta_1 = \dfrac{1}{m}$ ஆதலின், m-ன் மிகச் சிறிய மதிப்பிற்கும் பரவலின் கோட்டம் மிக அதிகமாகிறது. இது $m = 2$ வரை தொடர்கிறது. $2 < m < 5$ என்ற நிலையில் பாய்ஸான் பரவல் சமச்சீரற்ற தன்மையில் அமைவதாகக் காணப்படுகிறது. m ஆனது 6 அல்லது 6-க்கும் மேற்படும்பொழுது தோராயமாகச் சமச்சீர் பெறுவதோடு, பரவல் இயல் நிலைக்கு நெருங்குகின்றது. $\beta_2 = 3 + \dfrac{1}{m}$ ஆதலின், m அதிகமாக அதிகமாக, அதன் தட்டை அளவை 3 ஆவதோடு, வரை இயல் நிலைக்கு நெருங்குகிறது.

§ 7.5. பாய்ஸான் பரவலில் முகடு

t_r என்பது பரவலின் r ஆவது உறுப்பு என்க.

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{e^{-m}\, m^r}{\angle r} \times \frac{\angle r-1}{e^{-m}\, m^{r-1}} = \frac{m}{r}$$

எனவே $m \gtreqless$ என்பதற்கேற்ப $t_{r+1} \gtreqless t_r$.

வகை 1 : m ஒரு முழு எண்ணுனல்,

$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots\dots < t_m = t_{m+1} > t_{m+2} > \dots\dots$$

எனவே t_m, t_{m+1} என்பன மிகப் பெரிய மதிப்புடைய மதிப்புகளாகும். அவை $x = m - 1$, $x = m$ என்ற மதிப்புகளில் பெறப்படுகின்றன. எனவே முகடு $= m - \frac{1}{2}$ எனக் கொள்வது வழக்கம்.

வகை 2 : m என்பது ஒரு முழு எண்ணுக இல்லாவிடில், I என்பது m-ன் முழுப் பகுதி என்க. எனவே,

$$t_1 > t_2 > t_3 > \dots\dots t_{I+1} > t_{I+2} > \dots\dots$$

$\therefore$ t_{I+1} தான் மிகப் பெரிய மதிப்புள்ள உறுப்பாகும். $x = I$ என்ற நிலையில் இது பெறப்படுகின்றது. எனவே I தான் முகடாகும்.

இவ்விரு வகைகளிலும் முகடு $m - 1$-க்கும் m-க்கும் இடையில் அமைகிறது.

$0 < m < 1$ என்ற நிலையில் முகடு பூச்சியத்திலுள்ளது.

$m = 1$ எனில், முகடு $= \frac{1}{2}$

$1 < m < 2$ என்ற நிலையில் முகடு $= 1$ ஆகும்.

$m = 2$ எனில், முகடு $= 1\frac{1}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 1: சமமான மக்கள்தொகை கொண்ட 10 ஊர்களில் நாய்க்கடியால் இறந்தவர்கள் விவரம் சேகரிக்கப் பட்டது. 20 வருடங்களாகச் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பாய்ஸான் பரவலில் அமைத்து அலை வெண்களை ஒப்பிடுக.

ஓர் ஊரில் ஒரு வருடத்தில் நாய்க் கடியால் இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை	அலைவெண்
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1

நாய்க்கடியால் இறப்பது ஓர் அரிய நிகழ்ச்சியாதலால் இதைப் பாய்ஸான் பரவலாகக் கருதவேண்டும்.

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{0\times 109 + 1\times 65 + 2\times 22 + 3\times 3 + 4\times 1}{200}$$

$$= 0{\cdot}61$$

$$s^2 = \frac{0^2\times 109 + 1^2\times 65 + 2^2\times 22 + 3^2\times 3 + 4^2\times 1}{200}$$

$$= 0{\cdot}98$$

$$\sigma^2 = s^2 - \bar{x}^2$$

$$= 0{\cdot}98 - (0{\cdot}61)^2 = 0{\cdot}6079$$

$$= 0{\cdot}61 \text{ தோராயமாக.}$$

அதாவது σ^2 தோராயமாகக் கூட்டுச் சராசரிக்குச் சம மாகிறது. பாய்ஸான் பரவலுக்கான விதியை இது காட்டுகிறது. $m = 0{\cdot}61$ எனில்,

$$\text{பரவல்} = 200\, e^{-0\cdot 61}\left[1 + \frac{0{\cdot}61}{\angle 1} + \frac{(0{\cdot}61)^2}{\angle 2} + \frac{(0{\cdot}61)^3}{\angle 3} + \cdots\cdots\right]$$

$$= 108{\cdot}7 + 66{\cdot}3 + 20{\cdot}2 + 4{\cdot}1 + 0{\cdot}7 + \text{நிராகரிக்க வேண்டிய உறுப்புகள்.}$$

கீழ்க்கண்ட பட்டியலைக் காண்க:

இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை	கணக்கியல் பாய்ஸான் அலைவெண்கள்	கண்ட (Observed) அலைவெண்கள்
0	108·7	109
1	66·3	65
2	20·2	22
3	4·1	3
4	0·7	1

கணக்கியல் பாய்ஸான் அலைவெண்களும் கண்ட அலைவெண்களும் ஏறக்குறைய சமமாக இருத்தலை அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : 2% குறைபாடுடைய பியூஸ் (Fuses)கள் உள்ளன எனக்கொண்டு 200 பியூஸ்கள் கொண்ட ஒரு பெட்டியில் மிகுந்தது 5 குறைபாடுடைய பியூஸ்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? (செ. ப., 68)

கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x}$

$$= np$$

$$= 200 \times \frac{2}{100}$$

$= 4 = m$ என்க.

0, 1, 2, 3, 4, 5 குறைபாடுடைய பியூஸ்களின் நிகழ்தகவு

$$= e^{-4}\left[1 + \frac{4}{\angle 1} + \frac{4^2}{\angle 2} + \frac{4^3}{\angle 3} + \cdots\cdots\right]$$

என்ற தொடரால் பெறப்படும்.

அதாவது

$$0{\cdot}0183\left[1 + 4 + 8 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{128}{15} + \cdots\cdots\cdots\right]$$

முதல் ஆறு உறுப்புகளின் கூடுதலே வேண்டிய நிகழ்தகவு ஆகும்.

$= \ {\cdot}784155$

∴ இரண்டு இடங்களுக்குச் சுத்தமாக வேண்டிய நிகழ்தகவு $= {\cdot}78$

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 200 ஸ்குரு ஆணிகள் கொண்டதாகப் பத்துப் பெட்டிகள் வாங்கப்பட்டன. 2% குறைபாடுடைய ஆணிகள் உள்ளன எனில் வாங்கப்பட்ட பெட்டிகளுள் எட்டுப் பெட்டிகளில் குறைபாடுடைய ஆணிகள் இரண்டிற்குக் கீழ் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \bar{x}$$
$$= np$$
$$= 200 \times \frac{2}{100}$$
$$= 4 = m \text{ என்க.}$$

ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 0, 1, 2 ... குறைபாடுடைய ஆணிகள் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுள்

$$e^{-4}\left[1 + \frac{4}{\angle 1} + \frac{4^2}{\angle 2} + \cdots\cdots\right]$$

என்ற தொடரால் பெறப்படும்.

ஒரு பெட்டியில் குறைபாடுடைய ஆணிகள் இரண்டிற்குக் கீழே (அதாவது 0 அல்லது 1) இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= 0{\cdot}0183 \times 5$

$= 0{\cdot}0915$

இதனை p என்க, எனவே $q = {\cdot}9085$

ஒரு பெட்டி குறைபாடுடைய ஆணிகள் இரண்டிற்குக் கீழே கொண்டதாக இருப்பின் அதை வெற்றி என்க.

வாங்கப்பட்ட பெட்டிகளுள் எட்டு வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 10C_8\, p^8\, q^2$$
$$= 45 \times ({\cdot}0915)^8 \times ({\cdot}9285)^2$$
$$= {\cdot}0000001861$$

பயிற்சி

1. ஒரு பாய்ஸான் பரவலில் மூலப்புள்ளியைப் பொருத்த இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை 12. கூட்டுச் சராசரியைப் பொருத்த 3 ஆம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை 3 என நிறுவுக.

2. ஒரு நகரில் ஒரு வருடத்தில் வாடகைக் கார்களினுல் ஏற்படும் விபத்துகள் பாய்ஸான் பரவலாக இருக்கின்றன. அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 3 எனில் 1000 வாடகைக் கார்களில் (i) ஒரு வருடத்தில் விபத்தே ஏற்படாமல் (ii) 3 விபத்துகளுக்கு மிகாமல் எத்தனை வாடகைக் கார்கள் இருக்கும்?

3. ஒரு சம வாய்ப்புக் கூறு x பாய்ஸான் பரவலைப் பின்பற்று கிறது. $x = 1$ என அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவும், $x = 2$ என அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவும் சமமாகும் எனில், $x = 3$; $x = 4$ என்றவாறு அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை?

4. ஒரு நகர மருத்துவ மனையில் 10 நிமிட இடைவெளியில் சராசரியாக 4 அவசர அழைப்புகள் (Emergency Call) நிகழ் கின்றன. (i) 10 நிமிட இடைவெளியில் மிகுந்தது 2 அவசர அழைப்புகள் (ii) 10 நிமிட இடைவெளியில் சரியாக 3 அவசர அழைப்புகள் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

5. ஒரு தட்டெழுத்தாளர் 100 பக்கங்களில் கீழ்க்கண்டவாறு தவறு செய்கிறார். ஒரு பக்கத்தில் உள்ள தவறுகளின் எண்ணிக் கையும், அவ்வாறு எத்தனை பக்கங்கள் என்ற விவரமும் வருமாறு:

பிழைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
பக்கங்கள்	48	30	14	4	3	1

இதற்குரிய பாய்ஸான் பரவலை அமைத்துக் கணக்கியல் அலை வெண்கள் காண்க.

6. ஒரு வார காலத்தில் எதிர்பார்க்கப்படும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கை 5 எனில் 25 வார காலத்தில் 5 அல்லது 5-க்கு மேற் பட்ட விபத்துகள் ஏற்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

7. ஒரு செல்லில் (Cell) உள்ள சிவப்பு அணுக்களின் எண் ணிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

சிவப்பு அணுக்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
செல்களின் எண்ணிக்கை	142	156	69	27	5	1

இதற்குரிய பாய்ஸான் பரவல் காண்க.

8. ஒரு கம்பெனியின் ஒவ்வொரு நாளும் காணமற்போன பொருள்களின் எண்ணிக்கை வருமாறு:

பொருள்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
அலைவெண்	81	63	36	15	5	1

இதற்குரிய பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்துக.

8. இயல்நிலைப் பரவல்
(Normal Distribution)

§ 8.1. அறிமுகம்

வெவ்வேறு நிலைகளில் பல்வேறு கணக்கியல் அறிஞர்கள் இயல் நிலை வரையைக் கண்டுபிடித்தனர். அவர்களுள் முக்கியமாகக் கருதப்படுபவர் காஸ் என்பவராவர். அதனால் இயல்நிலைப் பரவலைக் காஸ் பரவல் என்பாரும் உண்டு. குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளோடு ஆய்வின் பிழைகள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன. ஆதலின் இவற்றிற்குரிய அலைவு, வளைகோட்டினைப் பிழைகளின் இயல் நிலை வரை (The Normal Curve of Error) என அழைக்கப்படுகின்றது. இந்த அத்தியாயத்தில் இனி e^x என்பதை $\exp(x)$ என எழுதுவோம்.

ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு தனித்த பரவலாகும். $n \to \infty$ என்ற நிலையில் ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமே இயல்நிலைப் பரவலாகும். இது p மிகச் சிறியதாக இல்லாமல் இருக்கும்பொழுது p-ன் எந்த மதிப்பிற்கும் உண்மையாகும்.

வகை 1: $p = q = \frac{1}{2}$ என்னும்பொழுது சமச்சீருள்ள ஈருறுப்புப் பரவலுக்குப் பொருந்தும் என நிரூபிப்போம்.

$$x \text{ வெற்றிக்குரிய அலைவெண்} = N.nC_x\, q^{n-x}\, p^x.$$

$$= \frac{N.\angle n}{\angle x\ \angle \underline{n-x}} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

$n = 2k$ என்க. எனவே n ஐ இரட்டைப்படை எண்ணாகக் கொள்ளலாம். $n \to \infty$ ஆகையால் k-ம் $\to \infty$.

$r = \frac{1}{2} n = k$ என்னும்பொழுது nC_r மிகப் பெரியதாகும்.

எனவே வெற்றிற்குரிய மிகப் பெரிய அலைவெண் $= \dfrac{N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \angle 2k}{\angle k \angle k}$

$= y_0$ என்க...(1)

மிக உயர்ந்த y தூரத்தின் இரு மருங்கிலும் பரவல் சமச்சீராக அமைந்து அதன் இரு மருங்கிலும் வாலோட்டமாக நீள்கிறது.

$(k + x)$ வெற்றிக்குரிய அலைவெண்

$$y = \frac{N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \angle 2k}{\angle\underline{k+x} \ \angle\underline{k-x}} \qquad \ldots\ldots(2)$$

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க,

$$\frac{y}{y_o} = \frac{\angle k \ \angle k}{\angle\underline{k+x} \ \angle\underline{k-x}} = \frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-x+1)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+x)}$$

பகுதியையும் தொகுதியையும் k^x ஆல் வகுக்க,

$$\frac{y}{y_a} = \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x-1}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{x}{k}\right)}$$

எனவே, $\log_e\left(\dfrac{y}{y_o}\right) = \displaystyle\sum_{r=1}^{x-1} \log_e\left(1-\frac{r}{k}\right) -$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{r}{k}\right)$$

k மிகப் பெரிய எண் என்பதை மனதிற் கொண்டு $\left(\dfrac{r}{k}\right)^2, \left(\dfrac{r}{k}\right)^3 \ldots$ முதலியவற்றை நீக்க,

$$\log\left(\frac{y}{y_o}\right) = -\frac{2}{k}\left[1 + 2 + \ldots\ldots + \overline{x-1}\right] - \frac{x}{k}$$

$$= -\frac{2}{k}x(x-1) - \frac{x}{k}$$

$$= -\frac{x^2}{k}$$

$$= -\frac{2x^2}{n}$$

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் $\sigma^2 = npq$

$$= 2k.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{k}{2}$$

எனவே $k = 2\sigma^2$ அல்லது $n = 4\sigma^2$ ஆகும்.

ஆகையால் $\log\left(\frac{y}{y_0}\right) = \frac{-2x^2}{4\sigma^2} = \frac{-x^2}{2\sigma^2}$

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

அதாவது $y = y_0 \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$

இது இயல் நிலை அலைவுச் சார்பாகும்.

வகை 2 : $p \neq q$ என்ற நிலையில், மேற்கண்ட தேற்றத்தின் நிரூபணம் நமது பாடத் திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டதாகும்.

§ 8.2. இயல்நிலை வரையின் பொது வடிவம்

மிக உயர்ந்த y ஆயத்திலிருந்து x ஐ அளக்கும்பொழுது இயல் நிலை வரையின் சமன்பாடு, $y = y_o \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$ எனக் கண்டோம்.

(x,y) என்ற புள்ளி வரையின் மேல் அமையும்பொழுது $(-x,y)$ என்ற புள்ளியும் இதன்மேல் அமைகிறது. எனவே இது y அச்சிற்கு இரு மருங்கிலும் சமச்சீராக அமைகிறது. எனவே இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 0$ ஆகும். இக் கூட்டுச் சராசரியின் x அச்சுத் தூரம் m எனில், மூலப்புள்ளியை வேறொரு புள்ளிக்கு மாற்றினால் மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் x-க்குப் பதிலாக $(x-m)$ என எழுத வேண்டும். மேலும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை முடிவிலியாகக் கொண்டு ஈருறுப்பிலிருந்து பெறப்பட்ட பரவலாதலின் மிக உயர்ந்த y ஆயத்திற்கு இரு மருங்கிலும் ∞ வரை இவ் வரையானது நீள்கிறது.

இவற்றை மனத்திற் கொண்டு,

$y = y_0 \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$ என இதன் சமன்பாட்டினை எழுதுவோம். வரைக்கும், x அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட பகுதியின் பரப்பே மொத்த அலைவெண்ணாகும்.

எனவே,

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx$$

$$= y_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

$$= \sqrt{2}\,\sigma y_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \quad \left[\because \frac{x-m}{2\sigma^2} = u\right]$$

$$= \sqrt{2}\,\sigma y_0 \sqrt{\pi}$$

எனவே, $y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

இயல் நிலை வரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$N = 1$ எனில்,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

இதுவே இயல் நிலை வரையின் பொது வடிவமாகும்.

§ 8.3. இயல்நிலை நிகழ்வெண் சார்பு (Normal Probabality Function)

$t = \frac{x-m}{\sigma}$ எனக் கொண்டால் இயல் நிலை வரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)\right]$$

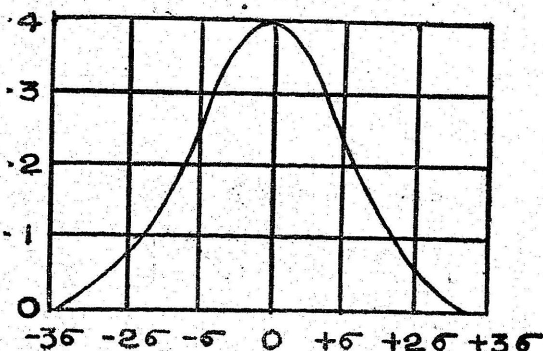
$= \frac{N}{\sigma}\,\phi(t)$ என ஆகிறது.

$$\text{இங்கு } \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

$N = 1$, $\sigma = 1$ எனில், $y = \phi(t)$ என்றுகிறது. அப்பொழுது $y = \phi(t)$-க்கும், x அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு ஓர் அலகாகின்றது. எனவே $y = \phi(t)$ என்பது மொத்த அலைவெண் ஒன்று எனக் கொண்ட ஒரு சிறப்பான இயல்நிலை வரையாகும். அதன் திட்ட விலக்கமும் ஓர் அலகாகும். $\phi(t)$ ஐ இயல்நிலை நிகழ்வெண் சார்பு என்கிறோம்.

$$y = \phi(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$ குறிப்பிடும் வரையை இயல் நிலை நிகழ்வெண் வரை என்று அழைக்கின்றோம். இந்த வரையின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



இயல்நிலை வரை
படம் 19

$x = -3\sigma$, $x = +3\sigma$ என்ற புள்ளிகளில், x அச்சினை, வரை மிக மிக நெருங்கி அமைகிறது என்பது நோக்கத் தக்கது. இங்கு x அச்சின் அலகுகளும், y அச்சின் அலகுகளும் வெவ்வேறாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டன. இயல் நிலை நிகழ்வெண் வரையில் $\sigma = 1$ என்பதால் இரு அச்சுகளிலும் ஒரே மாதிரியான அலகுகளை எடுத்துக் கொண்டால் வரை மிகவும் தட்டையாக இருக்கும்.

y ஆயத் தூரங்களின் பட்டியல்: t-க்கும், $-t$-க்குமான y ஆயத் தூரங்கள் சமமாகும். ஏனெனில் மிக உயர்ந்த y ஆயத் தூரத்தின் இரு மருங்கிலும் வரை சமச்சீரானதாகும். பூச்சி

யத்திலிருந்து 4 வரை உள்ள t-ன் மதிப்புகளுக்கு y ஆயத் துரங்கள் கணக்கிடப்பட்டுப் பட்டியலில் y ஆயத் தூரங்களின் பட்டியலாகத் தரப்பட்டுள்ளன. $t > 4$ எனும்பொழுது y ஆயத் தூரம் மிகச் சிறியதாகி விடுகின்றது. எனவே இப் பட்டியல் பொதுவாக வேண்டிய எல்லா மதிப்புகளுக்கும் y ஆயத் தூரங் களைக் கொடுக்கும்.

$t = 0$-க்கான y ஆயத் துரத்தை $0 \cdot 607$ ஆல் பெருக்க $t = 1$-க்கான y ஆயத் தூரம் கிடைக்கப் பெறும். இவ்வாறே $t = 2$-க்கான y ஆயத் தூரம் கணக்கிட $0 \cdot 135$ ஆல் பெருக்க் வேண்டும். $t = 3$-க்கான y ஆயத் தூரத்தைக் கணக்கிட $0 \cdot 011$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

எனவே இயல்நிலைப் பரவலில், m-ன் (கூட்டுச் சராசரி) இரு மருங்கிலும் σ தூரத்திலுள்ள y ஆயத் தூரம் $= 0 \cdot 607 \times$ (கூட்டுச் சராசரியின் y ஆயத் தூரம்)

இவ்வாறே 2σ, 3σ தூரங்களிலுள்ள y ஆயத் தூரங்களைக் கணக்கிடலாம்.

§ 8.4. பரப்புகளின் பட்டியல்

$t = 0$-விருந்து $t = t$ முடிய வரையின் பரப்பு $\int_0^t \phi(t)\, dt$ ஆகும். இது $t = 0$-விருந்து $t = 3 \cdot 5$ வரை கணக்கிடப்பட்டுப் பட்டியலாகத் தரப்படும். இந்தத் தொகையை இயல்நிலை நிகழ் வெண் தொகை என்கிறேம்.

மத்திய y ஆயத்திற்கு வலப் பக்கமுள்ள பரப்பானது மொத்த பரப்பில் சரி பாதியாகும். அதன் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

$$\therefore \int_0^{\infty} \phi(t)\, dt = \tfrac{1}{2}$$

அதே மாதிரி $\int_{-\infty}^{0} \phi(t)\, dt =$ மத்திய y ஆயத்திற்கு இடப் பக் கமுள்ள பரப்பாகும்.

$$= \tfrac{1}{2}.$$

ஆகையால் $\int_{-t}^{0} \phi(t)\, dt = \int_{0}^{t} \phi(t)\, dt$ என்பது தெளிவு.

மேலும் $\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt = \int_{0}^{t_2} \phi(t)\, dt - \int_{0}^{t_1} \phi(t)\, dt.$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி t-ன் எவையேனும் இரு மதிப்புகளுக்கிடையிலுள்ள பரப்பைக் காணலாம். t நேர்மறையாகவோ எதிர் மறையாகவோ இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\int_{-1 \cdot 2}^{3 \cdot 8} \phi(t)\, dt = \int_{-1 \cdot 2}^{0} \phi(t)\, dt + \int_{0}^{3 \cdot 8} \phi(t)\, dt$

$$= 0 \cdot 3849 + 0 \cdot 4999$$

$$= 0 \cdot 8848.$$

t-ன் ஏதேனுமொரு மதிப்பு $-1 \cdot 2$, $+3 \cdot 8$-க்கு இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \int_{-1 \cdot 2}^{3 \cdot 8} \phi(t)\, dt \div \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, dt$

$$= \frac{0 \cdot 8848}{1 \cdot 0000}$$

$$= 0 \cdot 8848$$

பொதுவாக t ஆனது (t_1, t_2) இடைவெளியில் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவினை $\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt$ தருகிறது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது. அதனால்தான் இதை நிகழ்தகவுத் தொகை என்கிறோம்.

§ 8.5. இயல்நிலை வரையின் பண்புகள்

(அ) கூட்டுச் சராசரியை மூலப்புள்ளியாகக்கொண்ட இயல்நிலை வரையின் சமன்பாடு $y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$ ஆகும். (x,y) என்ற புள்ளி இவ் வரையில் அமைந்திருப்பின், $(-x,y)$ என்ற

புள்ளியும் அமையும் எனக் கண்டோம். எனவே y அச்சைப் பொருத்து வரையானது சமச் சீரானது. ஆகையால் இயல்நிலை வரையில் கூட்டுச் சராசரி, முகடு, இடைநிலை ஆகிய மூன்றும் ஒன்றேயாகும்.

(ஆ) $x = 0$ என வைக்க, மிகப் பெரிய y ஆயத் தூரமான y_0 கிடைக்கின்றது. $y_0 = \dfrac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. நிகழ்வெண் வரையில் இது $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{\cdot}39894$ ஆகும். y ஆயத் தூரப் பட்டியலின்றும் இதனைப் பெறலாம்.

(இ) இயல்நிலை வரையானது, ஒரு வரை மட்டுமன்று; பலவரைகள் கொண்ட ஒரு குழுவாகும். இது m (கூட்டுச் சராசரி), σ (திட்டவிலக்கம்), N (மொத்த அலைவெண்) என்ற மூன்றினைப் பொருத்ததாகும். x, y அச்சுகளில் எடுக்கப்படும் அலகுகளைப் பொருத்தும் வரையின் உருவம் மாறும். எனவே ஓர் அலைவெண் வரையைப் பார்த்ததும் அது இயல்நிலை பெற்றதா? பெறுததா? என வரையறுத்துக் கூற இயலாது. மற்ற வழிகளில் இயல்நிலை வரையோடு ஒப்பு நோக்க வேண்டும். மொத்த அலைவெண் ஒன்று எனவும், கூட்டுச் சராசரி பூச்சியமெனவும் கொண்டு, x அச்சு, y அச்சுகளில் யாதேனுமோர் அலகில் இயல்நிலை வரையை முன்பே வரைந்தோம். இத்தகு வரைகள் மணி வடிவம் கொண்டிருக்கும்.

(ஈ) $y = y_0 \exp\left\{\dfrac{-x^2}{2\sigma^2}\right\}$. இதை வகைப்படுத்த,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y_0}{\sigma^2}\, x \exp\left\{\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_0}{\sigma^4} \exp\left\{\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right\} [x^2 - \sigma^2]$$

எனவே $x = \pm\sigma$ எனும்பொழுது, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும்.

$x = +\sigma$, $x = -\sigma$ ஆகியவை இயல்நிலை வரையின் திருகு புள்ளிகளாகும்.

(உ) $x = -\infty$ அல்லது $x = +\infty$ எனும்பொழுது மட்டுமே $y = 0$ ஆகின்றது. எனவே வரையானது x அச்சை முடிவிலியில் சந்திக்கிறது. x அச்சானது வரையின் தொலை தொடுகோடாகும்.

(ஊ) ஒற்றைப் படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_{2n+1} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(x-m)^{2n+1}\,dx = 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஏனெனில்,

$$f(x)\,(x-m)^{2n+1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} (x-m)^{2n+1}$$

$$= \text{ஓர் } x\text{-ன் ஒற்றைச் சார்பாகும்.}$$

(எ) இரட்டைப் படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_{2n} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(x-m)^{2n}\,dx$$

$$= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} (x-m)^{2n}\,dx$$

$x = m + t\,\sigma$ எனில், அதாவது $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$ எனில்

$$dx = \sigma\,dt$$

$$\mu_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^{2n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}t^2\right\} t^{2n}\,\sigma\,dt$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}t^2\right\} t^{2n}\,dt$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}t^2\right) t^{2n}\,dt \text{ என்க.}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n-1}\, d\left[-\exp\left(-\tfrac{1}{2} t^2\right)\right]$$

$$I_{2n} = \left[-t^{2n-1} \exp\left(-\tfrac{1}{2} t^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + (2n-1)\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n-2} \exp\left(-\tfrac{1}{2} t^2\right) dt$$

வலப் பக்கத்திலுள்ள முதல் உறுப்பு மேல், கீழ் எல்லைகள் இரண்டிற்கும் பூச்சியமாகிறது.

எனவே $I_{2n} = (2n-1)\, I_{2n-2}$

$= (2n-1)(2n-3)\, I_{2n-4}$

இதுபோன்றே, கடைசியாக

$I_{2n} = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1\, I_0$

ஆனல் $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2} t^2\right) dt = \sqrt{2\pi}$

எனவே $\mu_{2n} = (2n-1)(2n-3)\ldots 3.1.\sigma^{2n}$ ஆகும்.

(ஏ) மேற்கூறியவாறு $\mu_2 = \sigma^2$

ஆனல் $\mu_2 =$ (திட்ட விலக்கம்)^2

எனவே, இயல்நிலை வரையின் திட்ட விலக்கம் σ ஆகும்.

(ஐ) $\mu_3 = 0$. எனவே, $\beta_1 = 0$

இயல்நிலை வரையின் கோட்டளவை பூச்சியமாகும். வரை சமச்சீர் பெற்றது.

(ஒ) $\mu_4 = 3 \cdot 1\, \sigma^4$

எனவே $\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

$= \dfrac{3 \cdot \sigma^4}{\sigma^4} = 3.$

எனவே, இயல்நிலை வரையின் தட்டையளவை மூன்றாகும். எந்த வரையின் தட்டையளவை நிர்ணயிப்பதற்கும் இதுவே அடிப்படையாகும்.

(ஓ) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \; | x-m | \; dx.$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] | x-m | \; dx$$

வரை சமச்சீர் பெற்றதால் $x - m$ ஆனது நேர்மறையாகும். $x > m$ எனில்,

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] (x-m) \; dx$$

$$z = \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \text{ எனில், } dz = \frac{x-m}{\sigma^2} \; dx.$$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \sigma^2 \; \exp \; (-z) \; dz$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big[- \exp \; (-z) \Big]_{0}^{\infty}$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} . 1$$

$$= 0 \cdot 79788 \, \sigma$$

$$= \frac{4}{5} \, \sigma \text{ (தோராயமாக)}$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}$ (திட்ட விலக்கம்) என்ற நடைமுறைச் சூத்திரத்திற்கு இதுவே அடித்தளமாகும்.

(ஔ) t-க்குப் பொருத்தமான x-ன் மதிப்பால் Q_3 (கீழ்க் கால் மானம்) பெறப்படும். இங்கு

$$\int_{-\infty}^{t} \phi(t)\, dt = 0 \cdot 75$$

$$\int_{-\infty}^{0} \phi(t)\, dt = 0 \cdot 5 \text{ ஆகையால்}$$

$$\int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = 0 \cdot 25$$

பரப்புப் பட்டயடிலில் t-ன் மதிப்பு $0 \cdot 6745$ ஆகும்.

எனினும் $x = m + \sigma t$

எனவே $Q_3 = m + 0 \cdot 6745\, \sigma$

$Q_1 = m - 0 \cdot 6745\, \sigma$

கால்மான விலக்கம்

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = 0 \cdot 6745\, \sigma = \tfrac{2}{3}\sigma \text{ (தோராயமாக)}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ திட்ட விலக்கம்}$$

(க) $0 \cdot 6745\, \sigma$ என்பது நிகழ்தகவுப் பிழை என வரையறுக்கப் படுகின்றது. எனவே இயல் நிலை வரையின் கால்மான விலக்கம் = நிகழ்தகவுப் பிழை. இயல் நிலை வரையைப் பொருத்த மட்டில் (m + நிகழ்தகவுப் பிழை, m − நிகழ்தகவுப் பிழை) என்ற எல்லைக் குள் மொத்த அலைவெண்களில் 50% இருக்கும்.

(கா) $t = 1 \cdot 0$ எனில் பரப்பு $= 0 \cdot 3413$

$t = 2 \cdot 0$ எனில் பரப்பு $= 0 \cdot 4772$

$t = 3 \cdot 0$ எனில் பரப்பு $= 0 \cdot 4987$

என்று பரப்புப் பட்டியலில் காணலாம்.

$m \pm \sigma$ என்ற வீச்சினுள் மொத்த அலைவெண்ணில் சுமார் $2 \times 0 \cdot 3413 \times 100 = 68\%$ அமையும்.

அவ்வாறே $m \pm 2\sigma$ வீச்சினுள் மொத்த அலைவெண்ணில் சுமார் 95·4% அமையும், $m \pm 3\sigma$ வீச்சினுள் மொத்த அலைவெண்ணில் சுமார் 99·74% அமையும்.

இடைச்செருகல் முறைப்படி $m \pm 1{\cdot}96\sigma$ வீச்சினுள் மொத்த அலைவெண்ணில் சுமார் 95% அமைகிறது எனவும், $m \pm 2{\cdot}58\sigma$ வீச்சினுள் சுமார் 99% அமைகிறது எனவும் காணலாம்.

இவை யாவும் கூறுகளின் கொள்கை (Theory of Sampling)யில் முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன.

§ 8.6. புள்ளியியலில் இயல்நிலை வரையின் முக்கியத்துவம்

நேரில் கண்ட அம்சங்களின் பிழைகள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன. பல்வேறு பரவல்களும் இயல்நிலை வரைக்குட்பட்டவை. எனவே இயல்நிலை வரை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவொன்றாகும்.

(i) நேரில் கண்ட அம்சங்களின் பிழைகள் மிகச் சிறியனவாகவும் எண்ணிக்கையில் மிக அதிகமாகவும், நேர்மறையாகவோ, அல்லது எதிர்மறையாகவோ இருப்பதற்குச் சம வாய்ப்பு உள்ளனவாகவும் இருப்பின், கணக்கியல் மொத்தப் பிழையை இயல்நிலை விதிக்குட்பட்டதாகக் காணலாம். செய்முறையில் இது உண்மையென அறியலாம். (ii) விலங்கியலிலும், சமூக இயலிலும் பல பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவல்களாக இருத்தலைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரே இடத்தில் வாழும், ஒரே சாதியினரின், ஒரே பாலரின், சம வயதினரின் உயரங்கள், எடைகள், மார்பளவுகள் இயல்நிலைப் பரவல் என அறியலாம். பல்வேறு செடிகளின் அளவுகளும் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும். (iii) ஒரே சூழ்நிலையில் இறப்பு, பிறப்பு வீதம் இயல்நிலை விதியை அனுசரிக்கும். (iv) சமூக, பொருளாதார, விவரங்களில் இயல்நிலை விதி மிகச் சிறந்த பங்கு கொண்டது. உதாரணமாக, மனிதர்களின் அங்க அளவுகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட 'தைக்கப்பட்ட துணிகள்' இயல்நிலையில் பரவும் தன்மையுடையன. இயல்நிலைப் பரவலைக் கல்வி பற்றிய விவரங்களிலும், மனத் தத்துவம் பற்றிய விவரங்களிலும் காணலாம். ஈருறுப்புப் பரவலும், பாய்ஸான் பரவலும் மற்றும் பல கணக்கியல் பரவல்களும் கடைசியில் இயல் நிலைப் பரவலை நெருங்குகின்றன. இதனை மத்திய எல்லைத் தேற்றம் (Central Limit Theorem) என்கிறோம். இந்தப் பண்பு கொண்டதால் இயல்நிலைப் பரவல் புள்ளியியலில் பல வழிகளில் உபயோகமாக இருக்கிறது. இது மட்டுமன்று. புள்ளியியல் நிபுணருக்கு எளிதில் புரியும்

வண்ணம், இன்னும் பல சுலபமான, அழகான பண்புகள் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல், மிக முக்கியமான தொன்ருகும். செய்முறைப் புள்ளியியலில் ஒரு வரையானது இயல்நிலை வரையாக இல்லாவிடினும், மணி வடிவம் கொண்டதாக இருப்பின் அதனைத் தோராயமாக இயல்நிலை கொண்டதாகக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு கொள்வதில் தவறேதுமில்லையென நடைமுறையில் கண்டுள்ளனர்.

மேற்கூறிய காரணங்களால் புள்ளியியலில் இயல்நிலை வரை மிக முக்கியமானதாகும்.

இயல்நிலை வரையைப் பொருத்துதல் : கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு இயல்நிலை வரையைப் பொருத்த வேண்டுமானல் நாம் முதலில், கூட்டுச் சராசரி (m), திட்ட விலக்கம் σ என்ற இரண்டினைக் கணக்கிட்டு இதற்கான சமன்பாட்டினை எழுதிப் பரவலின் மொத்த அலைவெண் N-க்குச் சமப்படுத்த வேண்டும்.

செய்முறையில் இயல்நிலை வரையின் உதவியோடு, கொடுக்கப்பட்ட பரவலைப் பாகுபடுத்த, y ஆயத் தூரப் பட்டியலை அல்லது பரப்புப் பட்டியலை உபயோகிக்கவேண்டும். இது நமது பாடத் திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1 : 10,000 மாறிகள் இயல்நிலைப் பரவலில் உள்ளன. அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 40. திட்ட விலக்கம் 20·235. பட்டியலைப் பயன்படுத்தாது கால்மானங்கள் இடைநிலை, முகடு, நிகழ்வெண் பிழை, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க. குவிவு அலைவெண் 2,500-க்கான மாறியின் மதிப்பென்ன ?

இயல்நிலை வரையில், கூட்டுச் சராசரி, முகடு, இடைநிலை ஆகிய மூன்றும் ஒன்றேயாகும்.

எனவே, இடைநிலை = முகடு = கூட்டுச் சராசரி = 40

மேலும் நிகழ்வெண் பிழை $= \frac{2}{3}$ (திட்ட விலக்கம்)

$= \frac{2}{3}(20 \cdot 235)$

$= 13 \cdot 49$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}$ (திட்ட விலக்கம்)

$= 16 \cdot 188$

கால்மானங்கள் $Q_1 = \bar{x} - \frac{2}{3}$ (திட்ட விலக்கம்)

$= 26{\cdot}51$

$Q_3 = \bar{x} + \frac{2}{3}$ (திட்ட விலக்கம்)

$= 53{\cdot}49.$

மொத்த அலைவெண் 10,000 என்பதாலும் குவிவு அலைவெண் $2{,}500 = \frac{1}{4}(10{,}000)$ என்பதாலும் குவிவு அலைவெண் 2,500-க்கான மாறியின் மதிப்பு Q_1 என்பது தெளிவு.

எனவே குவிவு அலைவெண் 2,500-க்கான மாறியின் மதிப்பு $= 26{\cdot}51$

எடுத்துக்காட்டு 2 : இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் மொத்த அலைவெண்கள் சமமாகும். முதல் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் இரண்டாவது முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தின் மும் மடங்காகும். முதல் முழுமைத் தொகுதியின் மிகப் பெரிய அலைவெண் இரண்டாவதன் மிகப்பெரிய அலைவெண்ணில் மூன்றில் ஒரு பாகம் எனக் காட்டுக.

இயல்நிலை வரையின் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$y = \frac{N}{3\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-m)^2}{2(3\sigma)^2}\right\}$$

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-m')^2}{2\sigma^2}\right\}$$

முறையே $x = m$, $x = m'$ என வைத்தால் மிகப்பெரிய y ஆயத் தூரயங்கள் பெறப்படும்.

அவை $y_0 = \dfrac{N}{3\sigma\sqrt{2\pi}}$

$$y_0' = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

எனவே $y_0' = 3y_0$ ஆகும்.

குறிப்பு : n மிகப் பெரியதாக இருக்கும்பொழுது ஈருறுப்புப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலுக்கு நெருங்குகிறது எனக் கண்டோம். இப் பண்பைப் பயன்படுத்தி ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலில் வெவ்வேறு எல்லைக்குள் அலைவெண்களைக் காணலாம். இதற்கு இயல்நிலைப் பரவலில் பட்டியல்களைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இவ்வகையில் தோராயமாக அலைவெண்களைப் பெறலாம்.

ஈருறுப்பு விதிக்குட்பட்டிருக்கும் ஓர் அலைவெண் பரவலில் x_1, x_2 என்ற இரு மதிப்புகளுக்குள் வெற்றிக்குரிய நிகழ்வெண் காண, $t_1 = \frac{x_1 - \frac{1}{2} - np}{\sigma}$ எனவும், $t_2 = \frac{x_2 + \frac{1}{2} - np}{\sigma}$ எனவும் கொண்டு $\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt$ ஐக் காணவேண்டும்.

$$\therefore \text{ வேண்டிய நிகழ்தகவு } = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt$$

எடுத்துக்காட்டு 1: 20 நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்பட்டன. அப்பொழுது 8 அல்லது 9 அல்லது 10 தலைகள் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்பொழுது தலை பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

எனவே கூட்டுச் சராசரி $= np = 20 \times \frac{1}{2} = 10$

திட்ட விலக்கம் $= \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

$$t_1 = \frac{8 - \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{5}} - = 1 \cdot 11805$$

$$t_2 = \frac{10 + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{5}} + = 0 \cdot 22361$$

வேண்டிய நிகழ்தகவைப் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஒரு தொழிற்சாலை முதல் தரம், இரண்டாம் தரம், மூன்றும் தரம் என்று மூன்று வகையில் ஒரு பொருளை உற்பத்திச் செய்கிறது. முதல் தரம் 45% எனவும், இரண்டாம் தரம் 25% எனவும், மூன்றும் தரம் 30% எனவும் உற்பத்திச் செய்து, ஒவ்வொரு பெட்டியும் இருபது பொருள்கள் கொண்

டதாக 1,000 பெட்டிகளை விற்பனை செய்கிறது. இவற்றுள் 10 அல்லது 10-க்கு மேற்பட்ட முதல் தரப் பொருள்களைக் கொண்ட பெட்டிகள் எத்தனை ?

முதல் தரப் பொருளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $p = \cdot 45$

எனவே $q = \cdot 55$

கூட்டுச்சராசரி $= np = 20 \times \cdot 45 = 9$

திட்ட விலக்கம் $= \sigma = \sqrt{npq}$

$= \sqrt{20 \times \cdot 45 \times \cdot 55}$

$= 2 \cdot 012$

$$t_1 = \frac{10 - \frac{1}{2} - 9}{\sigma} = \frac{+1}{4 \cdot 024} = + \cdot 2485$$

$t_2 = \infty$ [10 அல்லது 10-க்கு மேற்பட்ட வெற்றிகளைக் கொண்டதால்]

பட்டியலினின்று வேண்டிய நிகழ்தகவு $= 0 \cdot 5 - 0 \cdot 098 = 0 \cdot 402$

1,000 பெட்டிகளில் $1,000 \times (0 \cdot 402) = 402$ பெட்டிகளில் 10 அல்லது 10-க்கு மேற்பட்ட முதல் தரப் பொருள்களிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஒரு சோதனையில் 1,000 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் பரவல் இயல்நிலை ஆகும். அதன் திட்ட விலக்கம் 11%, கூட்டுச் சராசரி 78% எனில், (அ) 90%-க்கு அதிகமான மதிப்பெண்களின் எண்ணிக்கை என்ன? (ஆ) மிகக் குறைந்த 10 மதிப்பெண்களின் மிகப் பெரிய மதிப்பெண் என்ன ? (இ) நிகழ்வெண் பிழை என்ன ? (ஈ) மத்திய 900 மதிப்பெண்கள் எந்த எல்லைக்குள் இருக்கும் ?

கூட்டுச் சராசரி $m = 78$. திட்ட விலக்கம் $\sigma = 11$

$$90\text{-க்கு ஒத்த } t\text{-ன் மதிப்பு} = \frac{90 - 78}{11} = 1 \cdot 09.$$

(அ) ஒரு மதிப்பெண் 90%-க்கு மேலே இருப்பதற்கான

$$நிகழ்தகவு = \int_{1\cdot09}^{\infty} \phi(t)\,dt$$

$$= 0\cdot5 - 0\cdot3621$$

$$= 0\cdot1379.$$

எனவே 1,000 மதிப்பெண்களில் 90%-க்கு அதிகமான மதிப்பெண்களின் எண்ணிக்கை = $1,000 \times 0\cdot1379 = 138$.

(ஆ) ஒரு மதிப்பெண் மிகக் குறைந்த 10-ல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{10}{1000} = \cdot01$

இதை $\int_{-\infty}^{-t} \phi(t)\,dt$ என்க.

ஆனால் $\int_{-\infty}^{0} \phi(t)\,dt = 0\cdot5$

எனவே, $\int_{-t}^{0} \phi(t)\,dt = 0\cdot49$

ஆகையால் $t = -2\cdot33$

இதற்கொத்த மதிப்பெண் x_1 என்க.

$\frac{1}{11}(x_1 - 78) = -2\cdot33.$

எனவே, $x_1 = 78 - 2\cdot33 \times 11$

$= 52\cdot37$

$= 52\%$ (தோராயமாக)

(இ) நிகழ்வெண் பிழை $= \frac{2}{3} \times 11 = 7\cdot3\%$

(ஈ) நமக்கு கூட்டுச் சராசரிக்கு அதிகமாக 450 மதிப்பெண்கள் தேவை. இவற்றுள் ஒன்றாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு = $0\cdot45$

நிகழ்வெண் தொகை 0·45 இருப்பதற்கொத்த t-ன் மதிப்பு (பட்டியலிலிருந்து) 1·645 ஆகும்.

இந்த வீச்சில் மிக அதிகமான சதவீதம் $= 78 + 11 \times 1{\cdot}645 = 96{\cdot}1\%$

இதேபோன்று கூட்டுச் சராசரிக்குக் கீழே 450 மதிப்பெண்கள் தேவை. அவற்றின் மிகச் சிறிய சதவீதம் $= 78 - 11 \times 1{\cdot}645 = 60{\cdot}0\ \%$.

எனவே மத்திய 900 மதிப்பெண்களும்
60·0 %-க்கும், 96·1%-க்கும் இடையிலிருக்கும்.

பயிற்சி

1. 5,000 மாறிகள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன. கூட்டுச் சராசரி 50; நிகழ்தகவுப் பிழை 13·49. பட்டியலைப் பயன்படுத்தாமல் கால்மானம், இடைநிலை, முகடு, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

1,250 குவிவு அலைவெண்ணைக் கொண்ட மாறி யாது?

2. இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் மொத்த அலைவெண்கள் சமமாகும். ஆனால் முதல் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம், இரண்டாம் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை விட இரு மடங்காகும் எனில், முதல் முழுமைத் தொகுதியின் மிக உயர்ந்த அலைவெண், இரண்டாவது முழுமைத் தொகுதியின் மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணில் பாதியெனக் காட்டுக.

3. ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியில் மாறுபாடு 2%. முழுமைத் தொகுதியின் 80%, 125 செ.மீ.-க்கு அதிகமாக இருக்கிறது எனில் அதன் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

4. கீழ்க்கண்ட பரவல் x என்ற மாறி குறிப்பிட்ட எல்லையில் அமையும் அலைவெண்களைக் காட்டுகிறது.

மாறி x	அலைவெண்
40-க்குக் குறைவாக	30
40-க்கும் 50-க்கும் இடையில்	33
50-க்கு மேல்	37

பரவல் இயல்நிலையாகும். x-ன் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் காண்க.

50–60 இடைவெளியில் அமைந்த அலைவெண்ணைக் காண்க.

5. கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்துக.

x	0	1	2	3	4	5	6
f	5	9	15	52	21	10	8

6. ஒரு மரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 30 இலைகளின் நீளங்கள் வருமாறு :

இலையின் நீளம்	அலைவெண்
20 – 24	2
25 – 29	4
30 – 34	6
35 – 39	7
40 – 44	6
45 – 49	3
50 – 54	2

இயல்நிலைப் பரவலைக் காண்க.

7. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் கால்மான விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவை 10:12:15 என்ற விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

8. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் 35-க்குக் கீழே 87% அம்சங்களும், 63-க்கு மேல் 11% அம்சங்களும் அமைந்திருந்தால், அதன் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

9. 1,000 மாணவர்கள் தேர்வு எழுதுகின்றனர். அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலாக இருக்கிறது. கூட்டுச் சராசரி 40% எனவும், திட்ட விலக்கம் 10% எனவும் கொண்டு, தேர்வதற்குக் குறைந்தது 30% என வைத்துக்கொண்டால், எத்தனை பேர் தேர்வர் ?

10. ஓர் இளைஞர் குழுவில், 60% பேர் ஓர் அரசாங்கப் பணித் துறையில் சேர்க்கப்படுவதற்கு ஏற்ற வாய்ப்புடையவர்களாக அமைக்க வேண்டியிருக்கிறது. அவர்களின் சராசரி உயரம் 60·6", திட்ட விலக்கம் 2·25" எனில், அத்தகைய தேர்வுக்குரிய குறைந்த உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

11. கல்லூரி மாணவர்கள் 900 பேர்களின் புத்திகூர்மைக் கெழுவின் கூட்டுச் சராசரி 50. திட்ட விலக்கம் 20 ஆக இருந்து, அது ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்தால் (i) 30-70 என்ற பிரிவில் அமையும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை என்ன? (ii) 65-க்கு மேல் அமையும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

12. ஒரு போர்ப் படை வீரர்களின் உயரம் இயல்நிலைப் பரவல் ஆக அமைகிறது. கூட்டுச் சராசரி உயரம் 67·5", சராசரித் திட்ட உயரம் 2·5" எனில், 100 படை வீரர்களில் (i) 6 அடிக்குமேல் உயரமானவர்கள் எத்தனை பேர்? (ii) 5'10"-க்குள்ளாக எத்தனை பேர் இருப்பர்?

13. 100 மாணவர்களில் 60 மதிப்பெண்களுக்கு மேல் பெற்றுத் தேறியவர்கள் 50 பேர். 50-க்கு மேல் 60-க்குள்ளாக மதிப்பெண்கள் பெற்றுத் தேறியவர்கள் 35 பேர். மற்றவர்கள் 50-க்குக் குறைவாக எடுத்தவர்கள். பரவல் இயல்நிலையானதாகக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் 43 முதல் 53 வரை மதிப்பெண்கள் பெற்றவர் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

9. வளைகோடு பொருத்தல்
(Curve Fitting)

§ 9.1. அறிமுகம்

ஒரு கல்லூரியின் மாணவர்களை முழுமைத் தொகுதி என்கிறோம். அவர்களுள் ஒரு குறிப்பிட்ட மாணவர் குழுவினை அம் முழுமைத் தொகுதியின் கூறு (Sample) எனக் கூறுகின்றோம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் கூறுகள் மூலம் முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளை அறியலாம். இதற்கான ஏற்ற வழி வளைகோடு பொருத்தலேயாகும்.

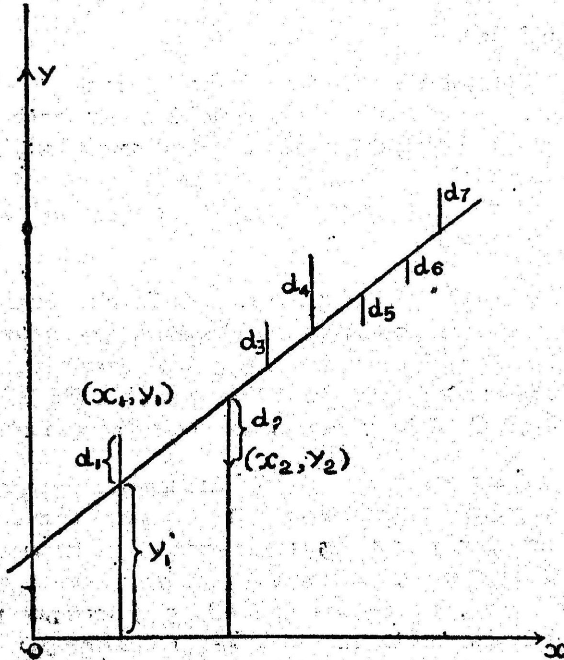
ஒற்றை மாறி மட்டுமிருப்பின், அலைவெண் பரவலும் ஒரு மாறியே. விவரங்களுக்கேற்ற அலைவெண் வரையை வரையலாம் எனக் கண்டோம். இதுபோன்றே ஈருறுப்புப் பரவல் இனத் தொகுதிக்கும், பாய்ஸான் பரவல் இனத் தொகுதிக்கும், இயல்நிலை இனத் தொகுதிக்கும் வெவ்வேறு வகையான வரைகளை அமைக்கலாம்.

கல்லூரி மாணவர்களுள் குறிப்பிட்ட மாணவர் குழுவினை முழுமைத் தொகுதியின் கூறாகக் கொண்டு, மாணவர்களின் வயதையும் உயரத்தினையும் x, y என இரு மாறிகளாகக் கொள்ளலாம். இவ்விரு மாறிகளும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையன. ஒரு குறிப்பிட்ட x அல்லது y மாறியின் மதிப்பிற்கு இணையான y அல்லது x-ன் மதிப்பினை மதிப்பிட, வளைகோடு பொருத்தல் பயன்படுகின்றது.

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n) என்பன ஒரு கூறில் கண்ட x, y-ன் x மதிப்புகள் என்க. இவற்றை ஏற்ற அச்சுகளில் பொருத்தமான அலகுகளைக் கொண்டு, ஒரு வரை தாளில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். இப்புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தமான ஒரு நேர்கோட்டையோ அல்லது ஒரு பரவளைவையோ அமைக்கலாம். இவ் வகையில் அமைக்கும் நேர்கோடு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த

தாகும். நிறைய இடங்களில் இரு மாறிகள் நேர்கோடுகளால் இணைக்கப்படும். அதாவது x-ன் ஏற்றத்திற்கிணையான y-ன் ஏற்றத்தைக் காணலாம். சில நேரங்களில் விவரங்களைப் பரவலையில் அமைத்துக் காட்டலாம். புள்ளி விவரங்களை நேர்கோடு, பரவலைவு முதலியவற்றில் அமைத்துக் காட்ட எளிமையானதும், சிறந்ததுமான குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை (Principle of least squares) என்பதை முதலில் விளக்குவோம்.

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ... என்ற n ஜோடி மதிப்புகளைக் கொள்க. $y = f(x)$ என்பது பொருத்தப்படும் வளைகோட்டின் சமன்பாடு என்க.



படம் 20:

$y_1' = f(x_1)$; $y_2' = f(x_2)$ ... என எழுதலாம்.

$d_1 = y - y_1'$; $d_2 = y_2 - y_2'$ ... என்க.

இவற்றை விலக்கங்கள் (Residuals) எனக் கூறலாம்.

இவ் விலக்கெண் $d_i \gtreqless 0$ ஆக அமையலாம்.

எனவே $d_i^2 = [y_i - y_i']^2$ என்ற விலக்க வர்க்கத்தினை எடுத்துக்கொள்ளலாம். விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் $\Sigma\, d_i^2$ ஆகும். $E = \Sigma\, d_i^2$ என்க. E மிகச் சிறியதாக இருக்குமாறு $y = f(x)$ ஐ எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இக் கொள்கையைத்தான் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை எனக் கூறுகின்றோம். கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கேற்ப $y = f(x)$-ம் மாறும். பொதுவாக ஒரு நேர்கோட்டையோ அல்லது ஒரு பரவளையையோ அமைக்கலாம். நேர்கோடு அமைக்கும் வகையினை முன்பக்கத்தில் உள்ள படம் காட்டுகின்றது.

நேர்கோட்டிலிருந்து, y அச்சிற்கு இணையாக அமைக்கப்படும் புள்ளிகளின் தூரமே விலக்கங்களாகும். அவை நேர்மறையாகவோ, எதிர்மறையாகவோ இருக்கலாம். எனவே அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் காண்கிறோம். இக் கூடுதல் மிகச் சிறியதாக இருப்பின், நேர்கோடு ஏறத்தாழ ஏற்றதொரு பொருத்தமாகும்.

வெவ்வேறு புள்ளி விவரங்களுக்கு வெவ்வேறு வகையான வளைகோடுகள் பொருத்தப்படுகின்றன. எவ்வகைப் புள்ளி விவரங்களுக்கு எத்தகைய வளைகோடு பொருத்தப்பட வேண்டுமென்பதைத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். இங்கு நேர்கோட்டைப் பொருத்தலையும், பரவளைவைப் பொருத்தலையும் காண்போம்.

§ 9.2. நேர்கோடு பொருத்தல்

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots (x_n, y_n)$ என்பன நேரில் கண்ட n மதிப்புகளாகட்டும்.

பொருத்தப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = ax + b$ என்க.

$$\text{எனவே } E = \Sigma\, d_i^2 = \Sigma\, [y_i - y_i']^2$$
$$= \Sigma\, [y_1 - (ax_1 + b)]^2$$

குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி, E மிகக் குறைந்த மதிப்புடையதாக இருக்கவேண்டும்.

$E = \Sigma\, [y_1 - (ax_1 + b)]^2$ எனக் கொண்டால்

நுண் கணிதத்தின்படி, E குறைந்த மதிப்புடையதாக இருக்க,

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0\,; \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

$$\text{அதாவது } \frac{\partial E}{\partial a} = \Sigma - 2x_1 [y_1 - (ax_1 + b)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \Sigma - 2 [y_1 - (ax_1 + b)] = 0$$

$$\Sigma x_1 y_1 - a \Sigma x_1^2 - b \Sigma x_1 = 0$$

$$\Sigma y_1 - a \Sigma x_1 - nb = 0$$

இவைகளிலிருந்து நாம் பெறும் இயல் சமன்பாடுகள் (Normal Equations)

$$a \Sigma x^2 + b \Sigma x = \Sigma x y$$

$$a \Sigma x + nb = \Sigma y$$

இவற்றைத் தீர்க்க, a, b-ன் மதிப்புகளைப் பெறலாம். இதனால் பொருத்தப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தீர்மானிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரத்திற்குப் பொருத்தமான நேர்கோட்டினைக் காண்க.

x	0	6	12	18	24
y	30	40	70	85	73

பொருத்தப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு, $y = ax + b$ என்க.

x	y	xy	x^2
0	30	0	0
6	40	240	36
12	70	840	144
18	85	1530	324
24	73	1752	576
60	298	4362	1080

இயல் சமன்பாடுகள்

$$1080a + 60b = 4362$$
$$60a + 5b = 298$$

தீர்க்க, $a = 2\cdot183;$ $b = 33\cdot4$

எனவே, பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 2\cdot183\,x + 33\cdot4.$$

இரண்டாவது முறை: கணக்கிடுவதற்கு எளிதாக, மூலப் புள்ளிகளை x-க்கும், y-க்கும் முறையே 12 ஆகவும், 70 ஆகவும் கொள்ளலாம். x-ன் பிரிவுகள் சமமாக இருப்பதால் அதைப் பிரிவின் அலகுகளால் வகுக்கலாம். இப்பொழுது பட்டியல்

	x'	y'	$x'y'$	x'^2
	-2	-40	$+80$	$+4$
	-1	-30	$+30$	$+1$
	0	0	0	0
	$+1$	$+15$	$+15$	$+1$
	$+2$	$+3$	$+6$	$+4$
மொத்தம்	0	-52	131	10

இயல் சமன்பாடுகள்

$$10a + 0.b = 131$$
$$0.a + 5b = -52$$

தீர்க்க, $a = 13\cdot1;$ $b = -10\cdot4$

எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y' = 13\cdot1\,x' - 10\cdot4$$

ஆனல் $y' = y - 70,$ $x' = \dfrac{x - 12}{6}$

இவற்றை உபயோகிக்க,

$$y - 70 = 13\cdot1\left(\frac{x-12}{6}\right) - 10\cdot4$$

$$\mathbf{y = 2\cdot183\,x + 33\cdot4.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2: கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரத்திற்குப் பொருத்தமான நேர்கோட்டினைக் காண்க.

ஆண்டு	1920	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ஏற்றுமதி அளவு	70	69	59	75	86	87	92	122	144	148	157

பொருத்தப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = ax + b$ என்க.

கீழ்க்கண்ட பட்டியலைக் காண்க.

x	y	x'	y'	$x'y'$	x'^2
1920	70	−5	− 17	85	25
1921	69	−4	− 18	72	16
1922	59	−3	− 28	84	9
1923	75	−2	− 12	24	4
1924	86	−1	− 1	1	1
1925	87	0	0	0	0
1926	92	1	+ 5	5	1
1927	122	2	+ 35	70	4
1928	144	3	+ 57	171	9
1929	148	4	+ 61	244	16
1930	157	5	+ 70	350	25
மொத்தம்		0	+152	+1106	110

இயல் சமன்பாடுகள்

$$110a + 0.b = 1106$$

$$0.a + 11b = 152$$

தீர்க்க, $a = 10{\cdot}05;\ b = 13{\cdot}82.$

எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y' = 10{\cdot}05\,x' + 13{\cdot}82$$

ஆனால் $y' = y - 87$

$$x' = x - 1925$$

எனவே, $y - 87 = 10{\cdot}05\,(x') + 13{\cdot}82$

அதாவது, $y = 10{\cdot}05\,(x') + 100{\cdot}82$

இங்கு y என்பது ஏற்றுமதி அளவு.

x' = ஆண்டு − 1925.

§ 9.3. பரவளைவுப் பொருத்தல்

(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) என்பன நேரில் கண்ட n ஜோடி மதிப்புகளாகட்டும்.

$y = ax^2 + bx + c$ என்பது பொருத்தப்படவேண்டிய பரவளைவு என்க. முன்பே கூறியது போல,

$$E = \Sigma d_1^2$$

$$= \Sigma\,[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)]^2$$

குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி E மிகக் குறைந்த மதிப்பாக இருத்தல் வேண்டும். எனவே $\frac{\partial E}{\partial a} = 0;\ \frac{\partial E}{\partial b} = 0:\ \frac{\partial E}{\partial c} = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \Sigma - 2x_1^2\,[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \Sigma - 2x_1\,[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \Sigma - 2\,[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] = 0$$

அதாவது $\Sigma x_1^2 y_1^2 - a\,\Sigma x_1^4 - b\,\Sigma x_1^3 - c\,\Sigma x_1^2 = 0$

$$\Sigma x_1 y_1 - a\,\Sigma x_1^3 - b\,\Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 = 0$$

$$\Sigma y_1 - a\,\Sigma x_1^2 - b\,\Sigma x_1 - nc = 0$$

எனவே, இயல் சமன்பாடுகள்

$$a\,\Sigma x^4 + b\,\Sigma x^3 + c\,\Sigma x^2 = \Sigma x^2 y$$

$$a\,\Sigma x^3 + b\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x = \Sigma xy$$

$$a\,\Sigma x^2 + b\,\Sigma x + nc = \Sigma y$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து, a, b, c-ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்தால் பொருத்தப்பட வேண்டிய பரவளைவின் சமன்பாட்டினை எளிதில் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஏழு மக்கள் தொகைக் கணிப்புகளில் இந்தியாவின் மக்கள் தொகையைக் காட்டுகிறது. இப் புள்ளி விவரத்தினை ஓர் இருபடி பரவளைவில் பொருத்திக் காட்டுக.

ஆண்டு	1881	1891	1901	1911	1921	1931	1941
மக்கள் தொகை மில்லியனில்	257	279	284	303	306	338	389

மூலப்புள்ளி 1911 எனக் கொண்டு, ஆண்டுகளை x' என்க. இதற்கான அலகு = 10 ஆண்டுகள். y-க்கு மூலப்புள்ளி 303 என்க.

x'	y'	x'^2	x'^3	x'^4	$x'y'$	x'^2y'	y'^2
—3	—46	9	—27	81	138	—414	2116
—2	—24	4	—8	16	48	—96	576
—1	—19	1	—1	1	19	—19	361
0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	1	1	3	3	9
2	35	4	8	16	70	140	1225
3	86	9	27	81	258	774	7396
0	35	28	0	196	536	388	11683

இயல் சமன்பாடுகள்

$$196a + 0.b + 28c = 388$$
$$0.a + 28b + 0.c = 536$$
$$28a + 0.b + 7c = 35$$

தீர்க்க, $a = 2{\cdot}9524$

$b = 19{\cdot}143$

$c = -6{\cdot}8096$

எனவே, சமன்பாடு $y' = 2{\cdot}9524\, x'^2 + 19{\cdot}143\, x' - 6{\cdot}8096$

$y' = y - 303,\ x' = \frac{x}{10}$. ஆதலின்,

நாம் பெறுவது $y - 303 = 0{\cdot}029524\, x^2 + 1{\cdot}9143\, x - 6{\cdot}8096$

இங்கு மூலப்புள்ளி 1911 கொண்ட x ஆண்டுகளுக்கு இணையாக y என்பது மக்கள் தொகையை (மில்லியனில்)க் குறிக்கும்.

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரத்திற்கு ஏற்ற ஒரு நேர்கோடு காண்க.

x	0	5	10	15	20	25	30
y	10	14	19	25	31	36	39

2. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கன்றுகளின் எடைகளைக் காட்டுகிறது. (கன்றுகளின் எடைகள் ஒவ்வொரு வாரமும் எடுக்கப்பட்டுக் குறிக்கப்படுகின்றன.) இப் பட்டியலுக்கேற்ற ஒரு நேர் கோடு காண்க.

கன்றின் வயது வாரங்களில்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
எடை	52·5	58·7	65·0	70·2	75·4	81·1	87·2	95·5	102·2	108·4

3. கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரத்தினை ஓர் இருபடி பரவளைவில் பொருத்திக் காட்டுக.

ஆண்டு	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
உற்பத்தி அளவு	63	62	52	68	79	80	85	115	137	141	150

4. கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரத்தினை ஓர் இருபடி பரவளைவில் பொருத்திக் காட்டுக.

x	10	15	20	25	30	35	40
y	11	13	16	20	27	34	41

10. ஒட்டுறவு
(Correlation)

§ 10.1. அறிமுகம்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் பல தன்மைகளைக் கொண்டிருத்தலை நாம் காணலாம். இவற்றை உறவுள்ள புள்ளி விவரங்கள் என்போம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களையும், அறிவியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களையும் எடுத்துக் கொள்வோம். புள்ளியியலில் அதிக மதிப்பெண்களைப் பெற்ற மாணவர்கள் அறிவியலிலும் அதிக மதிப்பெண்களைப் பெற்றனரா, இல்லையா என ஆராயலாம். அதாவது இவ்விரு பாடங்களில் மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்களின் இடையுறவினை அல்லது ஒட்டுறவினைக் காணலாம். இவ்வாறு இரு புள்ளியியல் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உறவும், அதன் அளவும் புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படும்.

உறவுள்ள புள்ளி விவரங்கள் சிலவற்றை நோக்குவோம். தந்தையரின் உயரங்களையும் அவர்களின் முதல் ஆண் மக்களின் உயரங்களையும் அளந்து, இவற்றிடையுள்ள ஒட்டுறவினைக் கண்டால், உயரமான தந்தைக்கு உயரமான மகன் உண்டா, இல்லையா எனக் கூறலாம். வெவ்வேறு இடங்களில் விளைநிலங்களில் அதிக உரமிட அதிக விளைச்சலைப் பெற முடியுமா, முடியாதா என அறியலாம். ஒரு பொருளின் தேவை அதிகமானால் அதன் உற்பத்தியும் அதிகமாகும். இவ்விரண்டும் அப் பொருளின் விலையோடு உறவுடையவை. பொருளின் தேவை அதிகமாக அதிகமாக, அதன் விலையும் அதிகமாதலைக் காண்கிறோம். ஒரு மாவட்டத்தில் நிறையத் தொழிற்சாலைகள் நிறுவப்படுமாயின் அம் மாவட்டத்தில் வேலையற்றோர் தொகை குறையும். இதனை எதிர்மறை உறவு என்போம். ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் ஒரு பொருளின் உற்பத்தி அதிகமாக அதிகமாக, அதன் தேவையும் அதிகமாதலை நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் காண்கிறோம்.

எனவே, புள்ளி விவரங்களில் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் இருக்குமாயின் அவற்றிற்குள்ள உறவுகளை அறிவது மிக்க பயன் தரும் என்பதை மாணவர்கள் உணரலாம். இரு மாறிகளுள், ஒன்று உயர மற்றொன்றும் உயர்ந்தால் அவற்றை 'நேர்மறை உறவு' கொண்டவை என்போம். அல்லாது ஒன்று அதிகமாக மற்றொன்று குறைந்தால் அவற்றை 'எதிர்மறை உறவு'

கொண்டவை என்று கூறுவோம். மழை அளவும் உற்பத்தி அளவும் நேர்மறை உறவில் உள்ளன. ஒரு பொருளின் விலையும் அதன் விற்பனை அளவும் எதிர்மறை உறவுடையன என அறியலாம்.

சில புள்ளி விவரங்கள் உறவுடையனவாகத் தோன்றும். ஆனால் உண்மையில் அவை உறவுடையனவாக இரா. எடுத்துக்காட்டாக 10 வருடங்களில் ஒரு நாட்டின் ஏற்றுமதியளவு அதிகமாகி இருக்கிறது என்போம். அதே சமயம் அதே பத்து வருடங்களில் அந் நாட்டில் கொலைக் குற்றங்களும் அதிகமாகி இருக்கின்றன என வைத்துக்கொள்வோம். இவ்விரு விவரங்களையும் கொண்டால் அவற்றிற்கிடையே நேர்மறை உறவு இருப்பதாகத் தோன்றும். அப்படியெனில், நாட்டில் கொலைக் குற்றங்கள் அதிகமாக அதிகமாக ஏற்றுமதியும் அதிகமாகும் என்று கூறிவிட முடியுமா? முடியாது. ஏன்? இத்தகு புள்ளி விவரங்களின் உறவினைக் காணக் கூடாது. காரணம், இவ்விரு மாறிகளும் சார்பற்றவை. இவ்விரண்டுமே காலம் சார் தொடர் வரிசையாதலின் மாறிகளுக்கிடையே உறவு இருப்பதாகத் தோன்றுகிறது. இவ்வகை உறவுக்கு 'அர்த்தமற்ற உறவு' என்பது பெயர்.

இனி, இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவினை அளப்பது எப்படியென்றும், அதனை அளக்கும் கருவி யாது என்றும் காண்போம்.

ஓர் இனத் தொகுதியில் இரு மாறிகளுக்கிடையே உறவு இருக்குமாயின் புள்ளி விவரங்களை இரு வகைகளாகப் படைக்கலாம். அம்சங்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருப்பின், அலைவுப் பரவலைப் போலவே உறவுள்ள விவரங்களைப் படைக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 10 மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களும், அறிவியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களும் கீழ்க்கண்டவாறு படைக்கப் பெறுகின்றன.

புள்ளியியலில் மதிப்பெண்கள்	42	51	55	60	65	70	73	85	88	100
அறிவியலில் மதிப்பெண்கள்	70	50	62	70	60	42	63	66	50	75

அம்சங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்பொழுது இரு வழிப் பட்டியலாகப் படைப்போம். இதனால் இருமாறி அலைவுப் பரவல் கிடைக்கப் பெறும். எடுத்துக்காட்டாக,

ஓர் ஏக்கர் நிலத்திற்கு இட்ட உரம் (பவுண்டுகளில்)

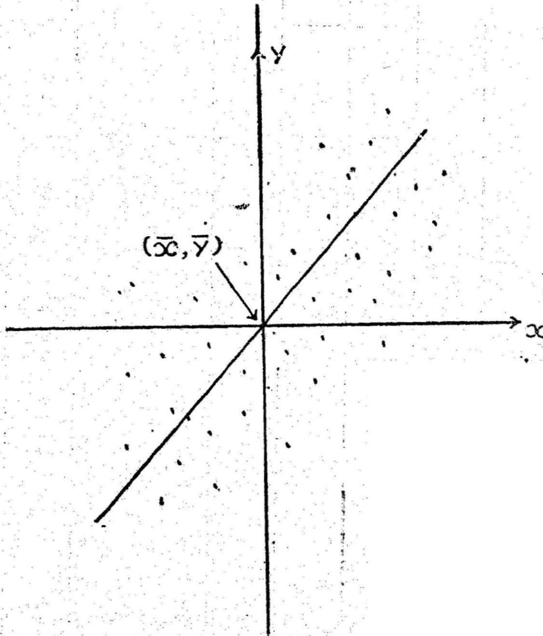
ஓர் ஏக்கரில் விளைந்த நெல் (மூட்டைகளில்)

	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80	80—90	மொத்தம்
0—5	9									9
5—10	11									11
10—15	4	6								10
15—20		9								9
20—25		18								13
25—30			14							14
30—35			17	20						37
35—40			2	21	22	9	5	2		61
40—45				6	17	13	5	6	3	50
மொத்தம்	24	28	33	47	39	22	10	8	3	214

§ 10.2. ஒட்டுறவும் சிதறல் விளக்கப் படமும்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் இரு மாறிகள் உறவுடையனவாக இருக்கட்டும். எடுத்துக்காட்டாகத் தந்தையரின் உயரங்களையும் அவர்களுடைய இருபது வயதினையடைந்த முதல் ஆண் மக்களின் உயரங்களையும் கொள்வோம். இவற்றுள் 50 அம்சங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இவ்விரு கணங்களிலும் கூட்டுச் சராசரி, முறையே $\bar{x}$, $\bar{y}$ என்போம். $\bar{x}$ வழியே செல்வதாக x அச்சையும், $\bar{y}$ வழியே செல்வதாக y அச்சையும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$X = x - \bar{x}$ எனவும், $Y = y - \bar{y}$ எனவும் கொண்டு எல்லா அம்சங்களுக்கும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இவ்விரு மாறிகளும் நேர்மறை உறவுடையவை என்போம். அதாவது x-ன் உயர்ந்த மதிப்புகள் y-ன் உயர்ந்த மதிப்புகளோடும், x-ன் தாழ்ந்த மதிப்புகள் y-ன் தாழ்ந்த மதிப்புகளோடும் தொடர்பு கொண்டிருந்தால் கீழ்க்கண்ட படம் கிடைக்கப் பெறும்.

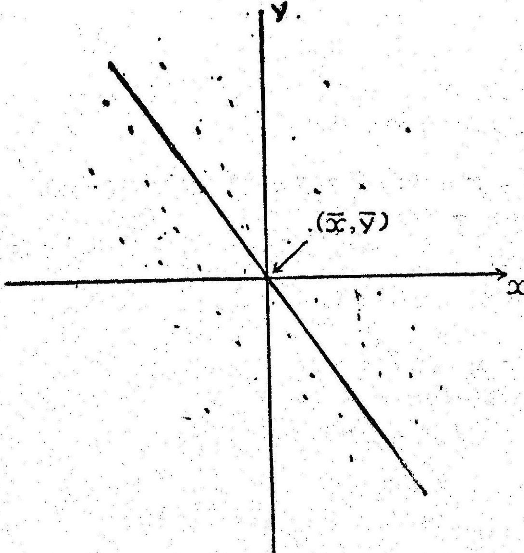


படம் 21

இதற்குச் சிதறல் விளக்கப் படம் என்பது பெயர்.

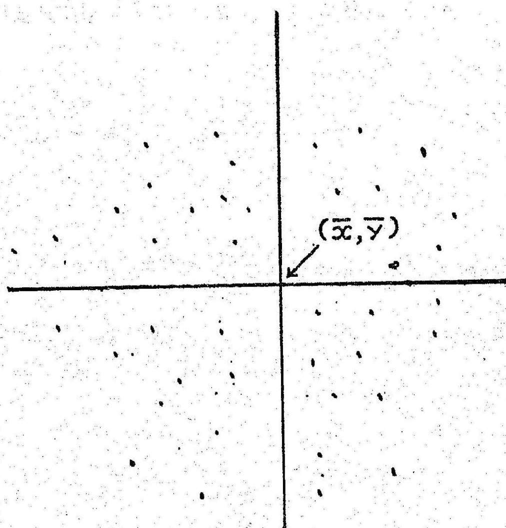
இங்கு நிறையப் புள்ளிகள் முதல் கால் பகுதியிலும் மூன்றும் கால் பகுதியிலும் சிதறி இருத்தலைக் காணலாம். இப் புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தப்படும் நேர்கோட்டிற்கு அருகிலேயே புள்ளிகள் அமைவதையும் காணலாம். பொருத்தப்படும் நேர் கோடும் $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியே செல்வதோடு, முதல் கால் பகுதியிலும், மூன்றும் கால் பகுதியிலும் அமைகிறது. நேர்மறை உறவு கொண்ட எல்லாப் புள்ளி விவரங்களுக்கும் இது பொருந்தும்.

எதிர்மறை உறவு கொண்ட புள்ளி விவரங்களுக்கான படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு நிறையப் புள்ளிகள் இரண்டாம் கால் பகுதியிலும் நான்காம் கால் பகுதியிலும் இருக்கின்றன. பொருத்தப்படும் நேர்கோடு $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியே செல்கிறது. நிறையப் புள்ளிகள் பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டிற்கு அருகில் அமை கின்றன. நேர்கோடும் இரண்டாம் கால் பகுதியிலும் நான்காம் கால் பகுதியிலும் அமைகிறது.



படம் 22

இரு மாறிகள் உறவற்றனவாக இருப்பின், புள்ளிகள் எல்லாக் கால் பகுதிகளிலும் இருக்கும். இதற்கான படம் அடுத்த பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 23

சிதறல் விளக்கப் படத்தில் புள்ளிகள் அமைந்த தன்மையினைக் கொண்டு x, y-க்குள்ள உறவினைத் தோராயமாக அறியலாம்.

$X = x - \bar{x};\quad Y = y - \bar{y}$ எனக் கொண்டு,

$P = \dfrac{\Sigma XY}{N}$ என்க. இங்கு N என்பது மொத்த அலைவெண்.

P ஐப் பரவலின் பெருக்குச் சுழல் திறன் என்போம். நிறையப் புள்ளிகள் முதல் கால் பகுதியிலும், மூன்றும் கால் பகுதியிலும் அமைந்திருப்பின் X, Y ஆகிய இரண்டுமே நேர்மறையாகவோ அல்லது எதிர்மறையாகவோ இருக்கும். எனவே XY நேர்மறை யாகும். ஆகையால் P நேர்மறையாகும்.

நிறையப் புள்ளிகள் இரண்டாம் கால் பகுதியிலும், நான்காம் கால் பகுதியிலும் அமைந்திருப்பின் P எதிர்மறை என்பது தெளிவு.

ஆனால் x என்பது ஓர் அலகிலும் y என்பது பிறிதோர் அலகிலும் சொல்லப்பட்டிருக்கலாம். எனவே இப் பெருக்குச் சுழல் திறன் அலகுகளின்று விடுபட்டு வெற்றெண்ணாக அமைய,

$r = \dfrac{P}{\sigma_x \sigma_y}$ என வரையறுக்கிறோம்.

இங்கு σ_x என்பது x-ன் திட்ட விலக்கம்.

σ_y என்பது y-ன் திட்ட விலக்கமாகும்.

r ஐ ஒட்டுறவு அளவுத் திறனாகக் கொள்கிறோம்.

எனவே,

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{\Sigma XY}{N \sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2 \times \Sigma (y - \bar{y})^2}}$$

இதற்குப் பியர்ஸன் பெருக்குச் சுழல் ஒட்டுறவுக் கெழு (Pearson's Product Moment Coefficient of Correlation) என்பது பெயராகும்.

இருமாறி அலைவுப் பரவலில் x, y என்ற இரு மாறிகளுக்கான அலைவெண் f_{xy} எனில்,

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\Sigma f_{xy} (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sigma_x \sigma_y} \text{ ஆகும்.}$$

பியர்ஸன் பெருக்குச் சுழல் ஒட்டுறவுக் கெழு $-1 \leqslant r \leqslant 1$ என்பதைப் பின்னால் காண்போம். இரண்டு மாறிகள் x, y நேர் மறை உறவு கொண்டனவாக இருப்பின், r ஆனது பூச்சியத்திற்கும் ஒன்றுக்குமிடையே இருக்கும். எதிர்மறை உறவு கொண்டிருப்பின் பூச்சியத்திற்கும் -1-க்குமிடையே இருக்கும். எனவே r-ன் மதிப்பி லிருந்து எவ்வகை உறவு எனச் சொல்லலாம். முழுமையான நேர் மறை உறவுக்கு r-ன் மதிப்பு ஒன்றாகும். ஆனால் நடைமுறையில் அவ்வாறு அமைவதில்லை. r-ன் மதிப்பு $0 \cdot 9$ அல்லது $0 \cdot 95$ போன்றே அமையும். அதேபோல எதிர்மறை உறவுக்கு $-0 \cdot 9$ அல்லது $-0 \cdot 95$ போன்று அமையும்.

பூச்சியத்திற்கு மிக அருகில் அமைந்தால் இரு மாறிகளும் உறவற்றவை எனலாம். எனினும் மாணவர்கள் உடனே இந்த

முடிவிற்கு வருதல் கூடாது. ஏனெனில் r ஆனது தோராயமாகப் பூச்சியம் என இருப்பினும், மாறிகள் வளைகோட்டு உறவு கொண்டனவாக இருக்கலாம். மாறிகள் உறவற்றன எனக் கூறுவதற்கு முக்கியத்துவச் சோதனைகள் (Tests of Significance) பல உள. (அவை நமது பாடத்திற்கு அப்பாற்பட்டவை.)

r ஐக் காணச் சுலபமான வழி : x, y மாறிகளுக்கு முறையே A, B என்ற எவையேனும் மூலப் புள்ளிகளைக் கொள்க.

$X=x-\bar{x}$; $Y=y-\bar{y}$; $d_1=\bar{x}-A$; $d_2=\bar{y}-B$ என்க.

$$\Sigma (x-A)(y-B) = \Sigma\left[(x-\bar{x})+(\bar{x}-A)\right]\left[(y-\bar{y})+(\bar{y}-B)\right]$$

$$= \Sigma (X+d_1)(Y+d_2)$$

$$= \Sigma XY+d_1 \Sigma Y+d_2 \Sigma X+\Sigma d_1 d_2$$

ΣX என்பது $\bar{x}$-லிருந்து x-ன் விலகல்களின் கூடுதலாகும்.

எனவே, $\Sigma X=0$

இவ்வாறே, $\Sigma Y=0$

மேலும், $\Sigma d_1 d_2 = N d_1 d_2$

எல்லா உறுப்புகளையும் N ஆல் வகுத்து, A, B ஐப் பொறுத்துக் கிடைக்கப் பெறும் பெருக்குச் சுழல் திறனை p' என்போம்.

எனில் $p'=p+d_1 d_2$

எனவே, $p=p'-d_1 d_2$

s_1 என்பது A-லிருந்து x-ன் வர்க்க மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம் என்க.

s_2 என்பது B-லிருந்து y-ன் வர்க்க மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம் என்க.

எனில் $\sigma_x=\sqrt{s_1^2-d_1^2}$; $\sigma_y=\sqrt{s_2^2-d_2^2}$

$$\therefore \text{ ஒட்டுறவுக் கெழு } r = \frac{p'-d_1 d_2}{\sqrt{s_1^2-d_1^2}\ \sqrt{s_2^2-d_2^2}}$$

A-ம் B-ம் பூச்சியமெனில்

$$p' = \frac{\Sigma xy}{N};\ d_1=\bar{x};\ d_2=\bar{y}$$

$$\text{ஆகையால், } r = \frac{\Sigma xy-N\bar{x}\bar{y}}{N\sigma_x \sigma_y}$$

எடுத்துக்காட்டு 1: *சில மாணவர் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களும், அறிவியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களும் தரப்பட்டுள்ளன. ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.*

புள்ளியியலில் மதிப்பெண்கள்	65	66	67	67	68	69	71	72	73
அறிவியலில் மதிப்பெண்கள்	67	68	64	68	72	70	70	69	70

x-க்கு மூலப்புள்ளி 67-லும், y-க்கு மூலப்புள்ளி 68-லும் கொண்டு கீழ்க்கண்ட பட்டியலை அமைப்போம்.

$$x' = x - 67 ; \qquad y' = y - 68.$$

புளளி யியலில் மதிப் பெண்கள்	அறிவியலில் மதிப்பெண் கள்	x'	y'	x'^2	y'^2	$x'y'$
65	67	−2	−1	4	1	+2
66	68	−1	0	1	0	0
67	64	0	−4	0	16	0
67	68	0	0	0	0	0
68	72	+1	+4	1	16	+4
69	70	+2	+2	4	4	+4
71	70	+4	+2	16	4	+8
72	69	+5	+1	25	1	+5
73	70	+6	+2	36	4	+12
மொத்தம்		+15	+6	87	46	+35

இங்கு $N = 9,\ d_1 = \dfrac{15}{9} = 1\cdot667$ எனவே $\bar{x} = 68\cdot667.$

$$d_2 = \frac{6}{9} = 0\cdot667 \qquad \text{எனவே } \bar{y} = 68\cdot667.$$

$$\sigma_x^2 = \frac{87}{9} - \left(\frac{15}{9}\right)^2 = \frac{558}{81}. \quad \text{எனவே, } \sigma_x = \frac{\sqrt{558}}{9}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{46}{9} - \left(\frac{6}{9}\right)^2 = \frac{378}{81}. \quad \text{எனவே, } \sigma_y = \frac{\sqrt{378}}{9}$$

$$p' = \frac{35}{9}. \quad \text{எனவே, } p = \frac{35}{9} - \left(\frac{15}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)$$

$$= \frac{225}{81}$$

ஆகையால் $r = \dfrac{p}{\sigma_x\ \sigma_y} = \dfrac{225}{81} \times \dfrac{81}{\sqrt{558} \times \sqrt{318}} = 0\cdot49$

எடுத்துக்காட்டு 2: கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து X, Y ஆகியவற்றிடையே ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

X

X / Y	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	மொத்தம்
15-25	1	1					2
25-35	2	12	1				15
35-45		4	10	1			15
45-55			3	6	1		10
55-65				2	4	2	8
65-75					1	2	3
மொத்தம்	3	17	14	9	6	4	53

Y

x-க்கு மூலப்புள்ளி 40 ஆகவும், y-க்கு மூலப்புள்ளி 40 ஆகவும் கொண்டு பட்டியலை அமைப்போம்.

x-ன் மையம் / y-ன் மையம்	20	30	40	50	60	70	மொத்தம் f_y	Y	$f_y Y$	$f_y Y^2$	$\Sigma f_{xy} YX$
20	1 4	1 2					2	—2	—4	8	6
30	2 2	12 1	1 0				15	—1	—15	15	16
40		4 0	10 0	1 0			15	0	0	0	0
50			3 0	6 1	1 2		10	1	10	10	8
60				2 2	4 4	2 6	8	2	16	32	32
70					1 6	2 9	3	3	9	27	24
மொத்தம் f_x	3	17	14	9	6	4	53	—	16	92	86
X	—2	—1	0	1	2	3	—				
$f_x X$	—6	—17	0	9	12	12	10				
$f_x X^2$	12	17	0	9	24	36	98				
$\Sigma f_{xy} XY$	8	14	0	10	24	30	86				

சமம்

பிரிவு அலகுகளில் கணக்கினைச் செய்யலாம்:

$$d_1 = \frac{12}{53};\ d_2 = \frac{16}{53}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{98}{53} - \left(\frac{12}{53}\right)^2 = \frac{5050}{53 \times 53}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{92}{53} - \left(\frac{16}{53}\right)^2 = \frac{4620}{53 \times 53}$$

$$p' = \frac{86}{53};\ p = p' - d_1 d_2 = \frac{86}{53} - \frac{12}{53} \times \frac{16}{53} = \frac{4366}{53^2}$$

எனவே, $\gamma = \frac{p}{\sigma_x \ \sigma_y} = \frac{4366}{\sqrt{5050 \times 4620}} = 0{\cdot}9038$

§ 10.3. தொடர்புக் கோடுகளும் ஒட்டுறவுக் கெழுவும்

இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள உறவினை அளக்கும் கருவியான ஒட்டுறவுக் கெழு என்ற மாறிலியை எங்ஙனம் அளப்பது என அறிந்தோம் அல்லவா? இதைப் பிரயோகித்து x-ன் மதிப்பைக் கொண்டு y-ன் தோராய மதிப்பை அறியவும், y-ன் மதிப்பைக் கொண்டு x-ன் தோராய மதிப்பைக் காணவும் இயலுமா? புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தக் கூடிய நேர்கோட்டினை அமைத்தால் இயலும். இத்தகு நேர்கோடுகளுக்கு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் என்பது பெயர்.

கால்டன் தமது உயிரினங்களின் அங்க அளவுகள் பற்றிய ஆராய்ச்சியில் இதனை முதன் முதலாகக் கையாண்டார். [பின்னடைவே (Regression) மாறிகளின் தொடர்பு. தந்தையின் உயரம் சராசரி உயரத்திற்கு அதிகமாக இருக்குமானால் மகனின் உயரம் சராசரி உயரத்திற்கு அதிகமாக இருப்பதில்லை. இவ்வாறு பின்னடைவாகக் கொள்வது தொடர்பாகும். தற்காலத்தில் அந்தப் பொருளில் பயன்படுத்துவதில்லை.]

புள்ளி விவரத்திற்கேற்ப நேர்கோட்டினைப் பொருத்தி, அதன் மூலமாக x-ன் மதிப்பு வைத்து y ஐயும், y-ன் மதிப்பைக்கொண்டு x ஐயும் காண்பதற்குத் தொடர்புக் கோடுகள் பயன்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$......... முதலியவற்றிற்கு முன் அத்தியாயத்தில் கண்டபடி குறைந்த

வர்க்கக் கொள்கை முறையில் $y = mx + c$ என்ற நேர்கோட்டினைப் பொருத்துவோம்.

இயல் சமன்பாடுகளாவன : $m\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x = \Sigma xy$......(1)

$m\,\Sigma x + nc = \Sigma y$......(2)

(2) ஐ n ஆல் வகுக்க,

$$\frac{m\Sigma x}{n} + c = \frac{\Sigma y}{n}$$

$$ie\ m\,\bar{x} = c + \bar{y}$$

அதாவது பொருத்தப்பட்ட நேர்கோடு $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியே செல்கிறது. $\bar{x}, \bar{y}$ என்பன மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரியாகும். மூலப் புள்ளியை $(\bar{x}, \bar{y})$-க்கு மாற்ற $x - \bar{x} = X;\ y - \bar{y} = y$ என எழுதுவோம்.

எனவே $Y = m\,x$ என்ற நேர்கோடு புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தப்படும் கோடாகிறது. இந்த நேர்கோட்டிற்கான ஒரே இயல் சமன்பாட்டினை $m\,\Sigma x^2 = \Sigma\,x\,y$ என எழுதலாம்.

n (மொத்த அலைவெண்) ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது

$$m\,\sigma_x^2 = \frac{\Sigma\,x\,y}{n} = p. \text{ எனவே, } m = \frac{p}{\sigma_x^2}$$

எனவே, பொருத்தப்படும் நேர்கோடு $y = \dfrac{p}{\sigma_x^2} X$ ஆகும்.

$$\therefore\ y - \bar{y} = \frac{p}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \text{ ஆகும்.}$$

இக் கோட்டினை x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக் கோடு என்று அழைக்கின்றோம்.

$p = r\,\sigma_x\,\sigma_y$ ஆதலின், இதனை $y - \bar{y} = \dfrac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

அதாவது $\dfrac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r\,\dfrac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$ என்று எழுதலாம்.

இவ்வாறே பொருத்தப்படும் நேர்கோடு,

$x = my + c$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டிருப்பதாகக் கொண்டால், $X = \frac{p}{\sigma_y{}^2} y$ என்றுகும்.

அதனை $x - \bar{x} = \frac{p}{\sigma_y{}^2} (y - \bar{y})$ என்று எழுதலாம்.

அல்லது $x - \bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$

அதாவது, $\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = r \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$ என்றும் எழுதலாம்.

இதனை y-ன் மேல் x-ன் தொடர்புக் கோடு என்று அழைக்கிறோம்.

மேற்கண்ட இரு தொடர்புக் கோடுகளும் புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தப்படும் கோடுகளாகும். இவ்விரு கோடுகளும் வெவ்வேருனவை என்பது தெளிவு. இங்கு $\frac{p}{\sigma_x{}^2}$, $\frac{p}{\sigma_y{}^2}$ என்பன மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு (Regression Coefficient) என்று அழைக்கப்பெறும். அவற்றை b_1, b_2 எனக் குறிப்பிடுவோம்.

ஒரு மாறியின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால், மற்ருெரு மாறியின் சிறந்த மதிப்பினைத் தீர்மானிக்க இக் கோடுகள் உதவுகின்றன. தொடர்புக் கோடுகளைப் பயன்படுத்து முன்னர் காரணங்களையும் விளைவுகளையும் நன்கு அறிந்து கொள்ளவேண்டும். x என்பது காரணமாகவும், y என்பது விளைவாகவும் இருப்பின், x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக் கோட்டினைப் பயன்படுத்தல் வேண்டும். y தனி மாறியாகவும் x ஆனது y ஐச் சார்ந்த மாறியாகவும் இருப்பின், y-ன் மேல் x-ன் தொடர்புக் கோட்டினைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். எது காரணம், எது விளைவு என வரையறுத்துச் சொல்ல இயலாத வகையில் இரண்டு மாறிகளும் ஒன்றையொன்று சார்ந்த மாறிகளாக அமைந்த தருணங்களில் இரண்டு கோடுகளையும் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாகத் தந்தையின் உயரம் x கொடுக்கப்பட்டால் மகனின் உயரத்தை (y ஐ) x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து பெறலாம். ஆனுல் ஒருவனுடைய புத்திக் கூர்மையையும், அவன் படிக்கும் திறனையும் எடுத்துக் கொண்டால் எது காரணம், எது விளைவு எனக் கூற இயலாது. இவ்விரண்டும் ஒன்றையொன்று சார்ந்துள்ளன. எனவே இரு தொடர்புக் கோடுகளையும் பயன்படுத்தலாம்.

§ 10.4. தொடர்புக் கோடுகளின் தன்மைகள்

(i) r ஆனது அளவைகளின் அலகுகளினின்று விடுபட்டுத் தனிப் பெறுமானமாக இருப்பின் b_1-ம் b_2-ம், x, y-ன் அலகுகளால் ஆனவையன்று.

(ii) மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரியான $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியாக இரு தொடர்புக் கோடுகளும் செல்கின்றன.

(iii) திட்ட விலக்க அலகுகளில் சொல்லப்பட்ட கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து x-ன் விலகலின் ஓர் அலகு ஏற்றத்திற்கேற்ப, திட்ட விலக்க அலகுகளில் சொல்லப்பட்ட கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து y-ன் விலகலின் மாறுவீதத்தினை r ஆனது குறிக்கும்.

(iv) $$b_1 b_2 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= r^2$$

$$r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$$

r ஆனது நேர்மறையா அல்லது எதிர்மறையா என அறியத் தொடர்புக் கெழுக்களின் துணையைப் பெறவேண்டும்.

அப்பொழுது, $b_1 = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b_2 = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$

என்ற இரண்டும் பொருந்தும்.

(v) தோராய மதிப்பின் திட்டப் பிழை (Standard error of Estimate) $S_y = \sqrt{\dfrac{\Sigma d^2}{N}}$ என வரையறுக்கப்படும். இங்கு d என்பது x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து கணிக்கப்படும் y-ன் மதிப்பிலிருந்து நேரில் கண்ட y மதிப்பின் விலகல் ஆகும்: அதாவது s_y தோராய மதிப்பின் பிழைகளின் திட்ட விலக்கமாகும்.

எனவே $ns^2 = \Sigma d^2$

$$= \Sigma\left(y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x\right)^2$$

$$\left[\text{இங்கு } y = y - \bar{y};\quad x = x - \bar{x}\right]$$

$$ns^2 = \Sigma y^2 - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Sigma xy + r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \Sigma x^2$$

$$= N\sigma_y^2 - \frac{2r\sigma_y}{\sigma_x} N r \sigma_x \sigma_y + r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} N \sigma_x^2$$

$$= n\sigma_y^2 \left[1 - 2r^2 + r^2\right]$$

எனவே $s_y^2 = \sigma_y^2 [1 - r^2]$

இங்கு s_y^2-ம் σ_y^2-ம், நேர்மறையாதலின் $1 - r^2 \geqslant 0$ என்றுகிறது.

அதாவது $r^2 \leqslant 1$

$ie \; -1 \leqslant r \leqslant +1$

ஆகையால் ஒட்டுறவுக் கெழு, எண்ணளவில் ஒன்றிற்கு மேற்பட்டதன்று. இவ்வாறே $s_x = \sigma_x^2 (1 - r^2)$ இங்கு y-ன் மேல் x-ன் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து கணிக்கப்படும் x-ன் மதிப்பிலிருந்து நேரில் கண்ட மதிப்புகளின் விலகல்களின் தோராய மதிப்பின் பிழைகளின் திட்ட விலக்கம்.

மேலும் $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$-ம், $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$-ம் ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழானவையாகும். ஆதலால் இவ்விரண்டில் ஏதேனுமொன்று ஒன்றுக்குக் (Unity) கீழே இருத்தல் வேண்டும். r ஆனது எண்ணளவில் ஒன்றிற்குக் கீழானது என்று கண்டோம். $b_1 \left(= r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)$, $b_2 \left(= r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)$ ஆகிய இரண்டனுள் ஏதேனுமொன்று ஒன்றுக்குக் கீழே இருக்கும்.

(vi) $r = +1$ எனில், இவ்விரு தொடர்புக் கோடுகளும் ஒன்றன்மேல் ஒன்று பொருந்துகின்றன. அவற்றின் பொதுவான சமன்பாடு

$$\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$$ ஆகும்.

அதாவது முழுமையான உறவு உள்ளபொழுது இக் கோடுகள் பொருந்துகின்றன. உறவு நேர்மறையாக அமையவேண்டும்,

இதேபோல $r = -1$ என்றாலும் தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றன்மேல் ஒன்று பொருந்தும். அவற்றின் பொதுவான சமன்பாடு

$\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} = -\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}$ ஆகும். இங்கும் உறவு முழுமையாக அமையும்பொழுது கோடுகள் பொருந்துகின்றன என அறியலாம். ஆனால் உறவு எதிர்மறையாகும்.

மாறிகளுக்கிடையே உறவே இல்லையெனில் இக் கோடுகள் இரண்டும் குத்துக்கோடுகளாக அமையும். எனினும் $r = 0$ எனும் பொழுது, அம்மாறிகளிடையே உறவே இல்லையென அறுதியிட்டு உறுதியாகக் கூற இயலாது. அவை வளைகோட்டு ஒட்டுறவாக அமையலாம்.

(vii) இரு தொடர்புக் கோடுகளின் சாய்வு விகிதம் (Slope)

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \frac{1}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \text{ ஆகும்.}$$

இவற்றை முறையே m_1 என்றும், m_2 என்றும் குறிக்கலாம். θ என்பது இத் தொடர்புக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் எனில்,

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \pm\frac{r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} - \frac{1}{r}.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}{1 + \sigma_y{}^2 / \sigma_x{}^2}$$

$$\tan\theta = \pm\frac{1 - r^2}{r} \times \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2}$$

கிளைத் தேற்றங்களாக,

$r = \pm 1$ எனும் பொழுது, $\theta = 0$ ஆகிறது. எனவே, தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றன்மேல் ஒன்று பொருந்துகின்றன.

$r = 0$ எனும் பொழுது $\tan\theta = \infty$, $\theta = \pi / 2$ ஆகிறது. எனவே தொடர்புக் கோடுகள் குத்துக் கோடுகளாக அமைகின்றன எனக் காணலாம்.

§ 10.5. தொகுப்புப் புள்ளி விவரங்களுக்கான தொடர்புக் கோடுகள்

இருமாறி ஒட்டுறவுப் பட்டியலில் தொடர்புக் கோடுகளாவன:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{p}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = \frac{p}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})$$

$\bar{y}_x$ என்பது x மதிப்புக்கேற்ற y மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியாகும். இவ்வாறே $\bar{x}_y$ -ம் வரையறுக்கப்படும். இவை எவ்வாறு பெறப்படுகின்றன என்பது நமது பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டதாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கணக்கில், ஒட்டுறவுக் கெழு ·2 அல்லது ·3 ஆக இருப்பின் அதை மிகச் சிறியதெனவும் ஒட்டுறவுக் கெழு ·8 ஆக இருப்பின் அதை மிகப் பெரியதெனவும் நினைக்கத் தோன்றும். கணக்கிடப்பட்ட ஒட்டுறவுக் கெழு சிறியதா அல்லது பெரியதா என ஒரு முடிவுக்கு வருமுன் அக் கணக்கினைத் தீர ஆராய்ந்து அறிந்துகொள்வது அவசியம். முக்கியத்துவச் சோதனைகளைக் (Tests of Significance) கொண்டே தீர்மானிக்க வேண்டும். எனவே ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிட்டவுடனே ஒரு தீர்மானத்திற்கு வருவதை மாணவர்கள் தவிர்க்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: 20 அம்சங்களைக் கொண்ட இரு மாறி இனத் தொகுதியில் $\Sigma x = 93$, $\Sigma y = 233$, $\Sigma x^2 = 450$, $\Sigma xy = 1104$ எனில், x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக் கோட்டினைக் காண்க.

$$n = 20 \text{ ஆதலின், } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{93}{20} = 4{\cdot}65$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{233}{20} = 11{\cdot}65$$

$$s_x^2 \text{ (மூலப்புள்ளியைப் பொருத்து)} = \frac{450}{20} = 22{\cdot}5$$

$$\text{எனவே } \sigma_x^2 = s_x^2 - \bar{x}^2$$
$$= 22{\cdot}5 - (4{\cdot}65)^2$$
$$= {\cdot}8775$$

p' (மூலப்புள்ளியைப் பொருத்து) $= \frac{\Sigma xy}{N} = \frac{1104}{20} = 55 \cdot 20$

$$p = p' - d_1 d_2$$
$$= 55 \cdot 2 - (4 \cdot 65)(11 \cdot 65)$$
$$= 55 \cdot 2 - 54 \cdot 1725$$
$$= 1 \cdot 0275$$

x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக் கோடு

$$y - \bar{y} = \frac{p}{\sigma_x{}^2}(x - \bar{x})$$

$$y - 11 \cdot 65 = \frac{1 \cdot 0275}{\cdot 8775}(x - 4 \cdot 65)$$

$$\underline{y = 1 \cdot 17x + 6 \cdot 205}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : ஒட்டுறவுப் பகுதியிலுள்ள எடுத்துக்காட்டு (1)-க்குத் தொடர்புக் கோடு காண்க.

$\bar{x} = 68 \cdot 667, \quad \bar{y} = 68 \cdot 667$

$$r = 0 \cdot 49; \ \sigma_x = \frac{\sqrt{558}}{9}; \ \sigma_y = \frac{\sqrt{378}}{9}$$

x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக் கோடு

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r\,\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$$

$$\frac{y - 68 \cdot 667}{\frac{\sqrt{378}}{9}} = 0 \cdot 49 \ \frac{x - 68 \cdot 667}{\frac{\sqrt{558}}{9}}$$

சுருக்கினல் $9 \cdot 53\,x - 23 \cdot 62\,y = 492.$

எடுத்துக்காட்டு 3 : x-ன் மாறுபாடு $= 9$, தொடர்புக் கோடுகள் $8x - 10y + 66 = 0; \ 40x - 18y - 214 = 0$ எனில், x, y களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்புகள் என்ன? y-ன் திட்ட மதிப்பையும் ஒட்டுறவுக் கெழுவினையும் கணக்கிடுக.

தொடர்புக் கோடுகள் $(\bar{x}\ \bar{y})$-ன் வழியாகச் செல்கின்றன என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே,

$$8\bar{x} - 10\bar{y} + 66 = 0$$

$$40\bar{x} - 18\bar{y} - 214 = 0$$

தீர்க்க $\bar{x} = 13$, $\bar{y} = 17$ எனக் காணலாம்.

$$\text{மேலும் } r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

வகுக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{4}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{16}{9}. \text{ ஆனால் } \sigma_x^2 = 9$$

$$\text{எனவே } \sigma_y^2 = 16$$

$$\sigma_y = 4$$

$$\text{ஆகவே, } \frac{4}{3}\, r = \frac{4}{5}$$

$$r = \tfrac{3}{5} = \cdot 6$$

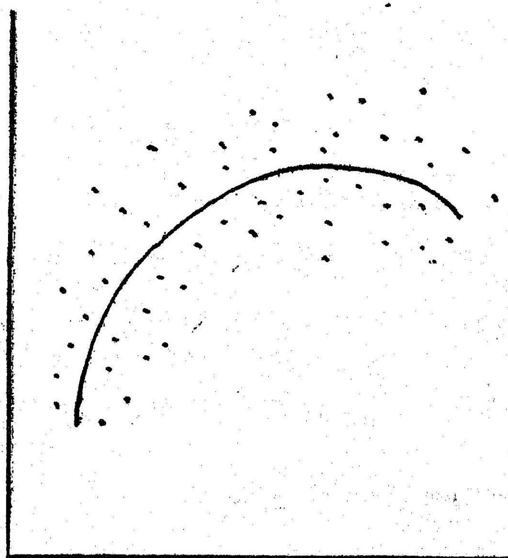
$$\text{ஒட்டுறவுக் கெழு} = 0\cdot 6$$

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவினைக் கணக்கிடுவதையும், புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான நேர்கோட்டினை அமைப்பதையும், அதற்குத் தொடர்புக் கோடு என்பது பெயர் என்பதையும் கண்டோம்.

தொடர்புக் கோட்டைப் பயன்படுத்தி x-ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால் y-ன் மதிப்பையும், y-ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால் x-ன் மதிப்பையும் கணிக்கலாம். தொடர்புக் கோடு ஒரு நேர்கோடாக அமைவதால் இது சாத்தியமாகிறது. அதாவது மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள உறவு நேர்கோட்டுக்குரிய (Linear) தாக அமைகிறது.

எனினும் எல்லாப் புள்ளி விவரங்களுக்கும் நேர்கோடு சரியான பொருத்தமாக அமைவதில்லை. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விளக்கப்

படம் காட்டும் புள்ளிகளுக்கு நேர்கோட்டினைத் தொடர்புக் கோடாகப் பொருத்த முடியாது.



படம் 24

இங்கு வளைகோடு பொருத்தமானதாக இருக்கும். இச் சமயங்களில் ஒட்டுறவுக் கெழு பூச்சியமாகவோ அல்லது மிகச் சிறியதாகவோ இருக்கும். உடனே மாறிகள் உறவுடையன அல்ல என்று முடிவு செய்தலாகாது. இவ்வாறு தொடர்புக் கோடானது வளைகோடாக அமையும் பொழுது மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவினை அளவிட ஒட்டுறவுக் கெழு பொருத்தமான கருவியன்று. அதற்குப் பயன்படுவது ஒட்டுறவு விகிதம் (Correlation Ratio) ஆகும். அது நமது பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டதாகும்.

ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண வேறொரு வழியும் உண்டு.

$z = x - y$ என்க.

$$\bar{z} = \frac{\Sigma z}{n} = \frac{\Sigma (x-y)}{n} = \frac{\Sigma x}{n} - \frac{\Sigma y}{n}$$

$$= \bar{x} - \bar{y}$$

$$z - \bar{z} = (x-y) - (\bar{x} - \bar{y})$$

$$= (x - \bar{x}) - (y - \bar{y})$$

$$\frac{\Sigma (z-\bar{z})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum \left[(x-\bar{x}) - (y-\bar{y}) \right]^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma (x-\bar{x})^2 + \frac{1}{n} \Sigma (y-\bar{y})^2$$

$$- \frac{2}{n} \Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

எனவே, $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2p$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

ஆகையால், $2r\,\sigma_x\,\sigma_y = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2$

$$\therefore r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

§ 10.6. தர ஒட்டுறவு (Rank Correlation)

புள்ளி விவரங்களின் இரு மாறிகளின் மெய்யான மதிப்புகள் கொடுக்கப்படாமல், அம் மாறிகளின் தர மதிப்புகள் **(Ranks)** கொடுக்கப்பட்டால் மேற்கூறிய முறையைப் பயன் படுத்தித் தரங்களுக்கிடையே உள்ள உறவினை அறியலாம். தரங் களுக்கிடையே உள்ள உறவு ஓரளவிற்கு அம் மாறிகளின் ஒட்டுற வினை எடுத்துக்காட்டும். தொடர்புக் கோடு நேர்கோடாக அமையு மென அனுமானித்து இந்தத் தர ஒட்டுறவினைக் காண்கிறோம்.

x-ன் தரங்களை ஏறு வரிசையில் அமைப்போம். அதற்கிணை யான y-ன் தரங்களை எழுதுவோம்.

x	1, 2, 3, 4, 5, ... n
y	3, 4, 1, 7, n,...................................10

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \tfrac{1}{2}(n+1)$$

இதே போன்று $\bar{y} = \frac{1}{2}(n+1)$ ஆகும்.

S_x^2 (மூலப்புள்ளி பூச்சியத்தைப் பொருத்து) $= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n}$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(n+1)(2n+1)\right]$$

$$\sigma_x^2 = S_x^2 - \bar{x}^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

இதே போன்று $\sigma_y^2 = \frac{n^2-1}{12}$

இவற்றை மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் பொருத்த,

$$\rho = \frac{\frac{1}{12}(n^2-1) + \frac{1}{12}(n^2-1) - \Sigma\frac{(x-y)^2}{n}}{2\sqrt{\frac{1}{12}(n^2-1)}\ \sqrt{\frac{1}{12}(n^2-1)}}$$

$$= 1 - \frac{6\,\Sigma\,(x-y)^2}{n\,(n^2-1)}$$

$x - y = d$ என்க.

d என்பது ஒவ்வோர் அம்சத்திற்கும் தரங்களிடையுள்ள வித்தியாசம்.

$$\rho = 1 - \frac{6\,\Sigma\,d^2}{n\,(n^2-1)}$$

இது தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரமாகும். ρ என்பது -1-க்கும், $+1$-க்கும் இடையில் அமையும்.

சில சமயங்களில் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட அம்சங்களும் ஒரே தரமுடையனவாக இருக்கலாம். x-ன் தரங்கள் 1, 2, 3, 4, 4, 6, 7......எனில், நான்காவது தரமாக இரண்டு அம்சங்கள் இருப்பதைக் காணலாம். அப்பொழுது ஒவ்வொன்றிற்கு 4 என எழுதுவதற்குப் பதிலாக $4\frac{1}{2}$ என எழுதுவோம். இவ்விரண்டு

அம்சங்களின் கூடுதல் 9 ஆகிறது. இதனல் கூட்டுச் சராசரி பாதிக்கப்படுவதில்லை. 7 ஆவது, 8 ஆவது, 9 ஆவது அம்சங்கள் சமமான தரமுடையனவாக இருப்பின் ஒவ்வொன்றிற்கும் தரம் 8 என எழுதுவோம். அப்பொழுது தரங்களின் கூடுதல் $7 + 8 + 9 = 8 + 8 + 8$. எனவே கூட்டுச் சராசரி பாதிக்கப்படுவதில்லை: எனினும் திட்ட விலக்கம் பாதிக்கப்படும். இதற்கு ஒரு திருத்தம் தேவை.

Σd^2 என்ற கூடுதல் $\frac{t^3 - t}{12}$ அதிகமாகிறது. இங்கு t என்பது சம தரங்கள் உள்ள அம்சங்களின் எண்ணிக்கை.

எடுத்துக்காட்டு 1: 10 மாணவர்கள் அறிவியலிலும், புள்ளியியலிலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு: அவைகளின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

அறிவியலில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் : 59, 58, 57, 53, 49, 47, 44, 40, 37, 30

புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் : 73, 53, 66, 65, 82, 40, 72, 76, 51, 60

∴ அறிவியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் தரங்கள் :
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் தரங்கள் :
3, 8, 5, 6, 1, 10, 4, 2, 9, 7

$d = -2, -6, -2, -2, 4, -4, 3, 6, 0, 3$

$d^2 = 4, 36, 4, 4, 16, 16, 9, 36, 0, 9$

$\Sigma d^2 = 134$

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n (n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 (134)}{10 \times 99} = 0 \cdot 1857$$

எடுத்துக்காட்டு 2: கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரத்திற்கேற்ற தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

X	68	64	75	50	64	80	75	40	55	64
Y	62	58	68	45	81	60	68	48	50	70

X	*Y*	*X*-ன் தரம் (x)	*Y*-ன் தரம் (y)	$d=x-y$	d^2
68	62	4	5	−1	1
64	58	6	7	−1	1
75	68	2·5	3·5	−1	1
70	45	9	10	−1	1
64	81	6	1	5	25
80	60	1	6	−5	25
75	68	2·5	3·5	−1	1
40	48	10	9	+1	1
55	50	8	8	0	0
64	70	6	2	4	16
				$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 72$

$$X \text{ தொடருக்கான திருத்தம்} = \frac{2(4-1)}{12} + \frac{3(9-1)}{12} = \frac{5}{2}$$

[75 இரண்டு முறை வருவதாலும் 64 மூன்று முறை வருவதாலும்]

$$Y \text{ தொடருக்கான திருத்தம்} \ \frac{2(4-1)}{12} = \tfrac{1}{2}$$

(68 இருமுறை வருவதால்)

எனவே தர ஒட்டுறவுக் கெழு $= 1 - \dfrac{6\,[\,\Sigma\, d^2 + 5/2 + \frac{1}{2}\,]}{n\,(n^2 - 1)}$

$$= 1 - \frac{6\,(72 + 3)}{10 \times 99}$$

$$= 0{\cdot}545$$

பயிற்சி

1. x, y என்பன உறவுள்ள சரி சம வாய்ப்புள்ள மாறிகள் (Random Variables). x-ன் மேல் y-ன் உறவுக் கோட்டினைப் பயன் படுத்தி, $x = x_1$ எனில், y-ன் மதிப்பாகிய y_1 யாது? இந்த y-ன் மதிப்பாகிய y_1 ஐப் பயன்படுத்தி y-ன் மேல் x-ன் உறவுக் கோட்டின் வாயிலாக x-ன் மதிப்பான x_2 ஐக் காண்க. இரு மாறிகளுக் கிடையே பூரண உறவிருந்தால் என்ன ஏற்படும்?

2. x, y என்பன உறவற்ற மாறிகள். $u = x + y$, $v = x - y$ எனில் u, v-க்கிடையே உள்ள உறவினை அவ்விரு மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்களில் காண்க.

3. 60 நிகழ்ச்சிகளில் கண்ட உறவுக் கோடுகளாவன: $5x = 6y + 24$, $1000y = 768x - 3608$. உறவுக் கெழு யாது?

4. x, y என்பன சரி சம வாய்ப்புள்ள மாறிகள். கூட்டுச் சராசரி பூச்சியம்; திட்ட விலக்கம் ஒன்று. $ax + by$, $bx + ay$-க்கு இடையே உறவுக் கெழு $\dfrac{1 + 2ab}{a^2 + b^2}$ எனில், x, y-க்குகிடையே உறவுக் கெழு என்ன?

5. 10 ஆட்களின் எடைகள் (y), வலக் கால் தொடை அளவு கள் (x) கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

y:	139	117	150	166	122	119	146	137	174	141
x:	20·0	19·0	20·4	24·0	19·5	19·5	22·2	21·5	24·2	21·2

(y — பவுண்டுகளில், x அங்குலங்களில்)

x-க்கும், y-க்குமிடையே ஒட்டுறவுக் கெழு என்ன?

6. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 1000 மனிதர்களின் உயரம், பருமனைக் காட்டும் இருவழிப் பரவலாகும்.

பருமன் பவுண்டில்

	85—100	100—115	115—130	130—145	145—160	160—175	175—190	190—205
60—62	3	9	1					
62—64	9	32	40	20	8	1		
64—66	7	39	95	51	31	4		
66—68	2	25	104	110	60	8	2	
68—70	1	4	42	71	49	40	5	2
70—72		1	5	11	32	35	4	
72—74			1	1	5	19	3	2
74—76				1		2	2	1

பருமனுக்கும் உயரத்திற்குமிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

7. $x = 4y + 5;\quad y = kx + 4$ என்பன இரு உறவுக் கோடுகளாகும். எனில் $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{4}$ என நிறுவுக. $k = \frac{1}{8}$ எனில், $\bar{x}$, $\bar{y}$ ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

8. x, y-ன் உறவினைத் தரும் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$. a-க்கும், b-க்கும் ஒரே குறியிருப்பின் x, y-ன் உறவுக் கெழு $+1$ எனவும், a-ம் b-ம் வேறு வேறு குறி கொண்டனவாயின் x, y-ன் உறவுக் கெழு -1 எனவும் நிறுவுக.

9. கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து, செலவான எண்ணெயின் அளவும், விளைந்த மின்சாரத்தின் அளவும் உறவுடையனவா எனக் காண்க.

எண்ணெய்	6·9	8·2	7·8	4·8	9·6	8·0	7·7
மின்சாரம்	1·9	3·5	6·5	1·3	5·5	3·5	2·2

10. வெவ்வேறு வயதினரில், இலட்சம் பேர்களில், எத்தனை பேர்கள் குருடர்கள் என்ற விவரத்தினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகின்றது. வயதுக்கும் குருடாக இருப்பதற்கும் உறவினைக் காண்க.

வயது (ஆண்டுகளில்)	0-10	10.20	20.30	30-40	40.50	50-60	60-70	70.80
இலட்சம் பேர்களில் குருடர்களின் எண்ணிக்கை	55	67	100	111	150	200	300	500

11. ஒரு தொழிற்சாலையில் 50 தொழிலாளர்களின் வயதும் சம்பளமும் வருமாறு:

மாதச் சம்பளம் (ரூபாயில்)

	160—169	170—179	180—189	190—199	200—209
20—30	5	3	1		
30—40	2	6	2	1	
40—50	1	2	4	2	2
50—60		1	3	6	2
60—70			1	1	5

ஒட்டுறவுக் கெழு என்ன ?

12. இரு உறவுக் கோடுகளிடையே உள்ள கோணம் θ. r அதன் ஒட்டுறவுக் கெழு எனில், $\sin \theta \leqslant 1 - r^2$ என நிறுவுக.

13. ஓர் அழகுப் போட்டியில் 10 நங்கைகளுக்கு *A, B, C* என்ற மூன்று நீதிபதிகள் அளித்த மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. மூன்று நீதிபதிகளும் பொதுவான அழகுக் கண்ணோட்டமுடையவர்களா என்பதை ஆய்க.

A: 1, 6, 5, 10, 3, 2, 4, 9, 7, 8

B: 3, 5, 8, 4, 7, 10, 2, 1, 6, 9

C: 4, 9, 8, 1, 2, 3, 10, 5, 7, 0

14. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கணவன் மனேவியரின் வயதினைக் காட்டுகிறது.

x:	22	24	26	26	27	28	29	30	31	32	34	35	36	37
y:	18	20	20	24	22	27	21	29	27	27	27	31	30	32

பியர்ஸன் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

15. 16 மாணவர்கள் கணிதத்திலும் இயற்பியலிலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

கணிதம் :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
இயற்பியல் :	1	10	3	4	5	7	2	6	8	11	15	9	14	12	16	13

தரக் கட்டுப்பாடு காண்க.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute	—	தனி
Absolutely convergent series	—	அறவொருங்குத் தொடர், அறகுவியுந் தொடர்
Add	—	கூட்டு
Addition	—	கூட்டல்
,, theorem of probability	—	நிகழ்தகவின் கூட்டு நியதி
Aggregate index number	—	மொத்தக் குறியீட்டெண்
Agricultural statistics	—	வேளாண்மைப் புள்ளி விவரம்
Algebra	—	இயற் கணிதம்
Analysis	—	பகுப்பாய்வு, பகுவியல்
Analysis of variance	—	பாவற்படி ஆய்வு
Answer	—	விடை, விடை கூறு
Aposteriori	—	காரண காரிய
,, probability	—	காரண காரிய நிகழ்தகவு
Applied statistics	—	பயன்முறைப் புள்ளியியல்
Apriori	—	காரணகாரிய
,, probability	—	காரணகாரிய நிகழ்தகவு
Arbitrary	—	யாதாமொரு
Arithmetic mean	—	கூட்டிடை, கூட்டுச் சராசரி
,, progression	—	கூட்டு விருத்தி, கூட்டுத் தொடர்
Ascending	—	ஏறுகின்ற
Association	—	தொடர்பு

Asymmetrical	— சமச்சீரில்லாத
,, distribution	— சீரிலாப் பரவல்
Average	— சராசரி (பொதுப்படை அளவை)
Average deviation	— சராசரி விலக்கம்
Axes of co-ordinates	— கிடைநிலை அச்சுகள், ஆயங்கள் (எக்ஸ், ஒய் அச்சுகள்)

B

Bar diagram	— பட்டை விளக்கப் படம்
Bar diagram compound	— கூட்டுப் பட்டை விளக்கப் படம் அடி
Bell shaped	— மணி வடிவமான
Best fit	— உத்தமப் பொருத்தமான
Biased	— ஒரு சார்பான, ஒருதலைப்பட்ட
Binomial	— ஈருறுப்பு
,, distribution	— ஈருறுப்புப் பரவல்
,, theorem	— ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Bivariate	— இருமாறி
Blank	— வெற்றிடம்
Brackets	— அடைப்புகள்

C

Calculate	— கணக்கிடு
Calculus	— நுண் கணிதம்
Cancel	— நீக்கு
Census	— மக்கள் கணிப்பு, முழுக் கணிப்பு
,, methods	— முழுக் கணிப்பு முறைகள்
Central	— மையமான, நடுவான
Centre	— மையம்
Chart	— வரைபடம்
,, mean	— சராசரிகளின் விளக்கப்படம்

Circle	—	வட்டம்
Class	—	இனம், பிரிவு, தரம்
,, limit	—	பிரிவு எல்லே
Classification	—	இனமாகப் பிரித்தல், பிரிவினே, வகுப்பாக்கம்
Coefficient of association	—	தொடர்புக் கெழு
,, of dispersion	—	சிதறல் கெழு
,, of skewness	—	கோட்டகக் கெழு
Combination	—	சேர்மானம், சேர்வு
Comparison	—	ஒப்பிடு
Compendium of statistics	—	புள்ளி விவரத் தொகுப்பு
Computation	—	கணிப்பு, கணக்கிடுதல்
Computer	—	கணனி
Condition	—	நிபந்தனே
Constant	—	மாரு, மாருத மாறிலி, நிலே யெண்
Continuous curve	—	தொடர் வரை
Continuous function	—	தொடர்புடைச் சார்பு
Control quality	—	தரக் கட்டுப்பாடு
Convention	—	வழக்கு, மரபு
Corollary	—	கிளேத் தேற்றம், துணே முடிவு
Correlation	—	ஒட்டுறவு, இடை உறவு
,, co-efficient	—	ஒட்டுறவுக் கெழு
,, ratio	—	ஒட்டுறவு விகிதம்
Cost price	—	கொள் விலே
Cost of living index number	—	வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட் டெண்
Cumulative	—	திரள், குவிப்பு
,, distribution	—	குவிவுப் பரவல்
,, frequency	—	வளர் நிகழ்வெண்
,, curve	—	வளர் நிகழ்வெண் வரை
,, frequency curve	—	வளர் நிகழ்வெண் வரை
Curve	—	வளேவு, வளேகோடு, வளேவரை

D

Data	—	விவரங்கள்
,, observational	—	கண்டறிந்த விவரங்கள்

,, primary	—	முதனிலை விவரங்கள்
,, reduction of statistical	—	புள்ளி விவரச் சுருக்கம்
,, secondary	—	துணைநிலை விவரங்கள்
,, statistical	—	புள்ளி விவரங்கள்
Death rate	—	இறப்பு வீதம்
Decimal	—	தசமம், பதின் பகுப்பு
Define	—	வரையறு
Degrees of freedom	—	சமன்பாட்டுப் படி
Depression	—	இறக்கம்
Design	—	திட்ட அமைப்பு, உருவமைப்பு
Design of experiments	—	சோதனைத் திட்ட அமைப்பு
Deviation	—	விலக்கம், விலகல், திசை மாற்றம்
,, absolute	—	தனி விலக்கம்
,, average	—	சராசரி விலக்கம்
,, mean	—	கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
,, quartile	—	கால்மான விலக்கம்
,, root mean square	—	மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம்
,, standard	—	திட்ட விலக்கம், தர விலக்கம்
Diagram	—	விளக்கப் படம்
,, bar	—	பட்டை விளக்கப் படம்
,, circle or pie	—	வட்ட விளக்கப் படம்
,, line	—	கோட்டு வரிப் படம்
,, scatter	—	சிதறல் விளக்கப் படம்
,, statistical	—	புள்ளி விவர விளக்கப் படம்
Difference	—	வித்தியாசம், வேறுபாடு
Digital computer	—	இலக்கக் கணனி
Discontinuous function	—	தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Discrete	—	தனித்தனி
Dispersion	—	பரவுகை
,, measures of	—	பரவுகை அளவைகள்
,, coefficient of	—	பரவுகைக் கெழு
Distribution	—	பிரிப்பீடு, பரவல்
,, binomial	—	ஈருறுப்புப் பரவல்
,, bivariate	—	இரு மாறிப் பரவல்
,, continuous	—	தொடர் பரவல்

Distribution discrete	—	தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவல்
,, frequency	—	நிகழ்வெண் பரவல்
,, normal	—	இயல்நிலைப் பரவல்
,, poisson	—	பாய்ஸான் பரவல்
Divide	—	வகு

E

Element	—	மூலகம், உறுப்பு
Eliminate	—	நீக்கு, விலக்கு
Empirical	—	அனுபவ
,, formula	—	நடைமுறைச் சூத்திரம்
Enumeration	—	எண்ணெடுப்பு, எண்மானம்
Enumerator	—	கணிப்பாளர்
Equal	—	சமன், சமம்
Equation	—	சமன்பாடு
Error	—	வழு, பிழை
,, absolute	—	தனிப் பிழை
,, standard	—	கூறு பண்புகளின் திட்ட விலக்கம்
Estimate	—	தோராய மதிப்பு
Event	—	நிகழ்ச்சி
,, favourable	—	சாதக நிகழ்ச்சி
,, independent	—	சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
,, mutually exclusive	—	ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்
Exercise	—	பயிற்சி
Explanation	—	விளக்கம்

F

Favourable event	—	சாதக நிகழ்ச்சி
Figure	—	இலக்கம், எண், உருவம்
Finite	—	முடிவுள்ள
Formula	—	சூத்திரம், வாய்பாடு

Fraction — பின்னம்
Frequency — நிகழ்வெண், மீள்வெண்
,, curve — நிகழ்வெண் வரை
,, distribution — நிகழ்வெண் பரவல், நிகழ்வுப் பிரிப்பீடு, மீளெண் பரவல்
,, polygon — நிகழ்வுப் பலகோணம்
,, table — நிகழ்வுப் பட்டியல்
Function — சார்பலன், சார்பு

G

Graph — வரைபடம்
Gross income — மொத்த வருமானம்

H

Half — அரை
Harmonic mean — இசைச் சராசரி, இசையிடை
,, progression — இசை விருத்தி, இசைத் தொடர்
Height — உயரம்
Histogram — பரவல் செவ்வகப் பட்டகம்
Hypothesis — எடுகோள், கோள் கொள்ளப் பட்டது

I

Imaginary — கற்பனையான, மெய்யிலா
Index — குறி, அட்டவணை
,, number — குறியீட்டெண்
Index number of price relatives— விலை சார்புக் குறியீட்டெண்
Indian council of agricultural research — இந்திய விவசாய ஆராய்ச்சிக் கழகம்
Indian statistical institute — இந்தியப் புள்ளியியல் நிலையம்
Inflexion, point of — வளைவு மாற்றப் புள்ளி
Interval — இடைவெளி

Inverse correlation — எதிரிடை ஒட்டுறவு
Investigate — ஆராய்தல்
Investigator — ஆய்வாளர்
Item — அங்கம், அம்சம்

K

Kurtosis — தட்டை அளவு
,, leptokurtic — குறைத் தட்டை
,, platykurtic — மிகைத் தட்டை

L

Large samples — பெருங் கூறுகள்
Law — விதி
Law of large numbers — பேரினங்களின் விதி
Law of statistical regularity — புள்ளி விவர ஒழுங்கு நியதி
Limit — எல்லை, வரம்பு
Line — கோடு, வரி, வரை
,, straight — நேர்கோடு
,, diagram — கோட்டு விளக்கப் படம்
Linear — நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒரு படிக் குரிய, நீட்டலுக்குரிய
Logarithm — மடக்கை

M

Mark — குறி, புள்ளி
Map — அமைப்பு மாற்று
Mathematics — கணிதம்
Maximum — உச்ச, உத்தமம், மீப்பெரிது, மீப்பெரு, பெருமம்
Mean — இடை, இடையுறுப்பு, சராசரி
Means — இடையுறுப்புகள்
Arithmetic mean — கூட்டிடை, கூட்டுச் சராசரி
Geometric ,, — பெருக்கிடை, பெருக்குச் சராசரி

Harmonic ,,	—	இசையிடை, இசைச் சராசரி
Weighted ,,	—	நிறையிட்ட சராசரி
Measure	—	அளவு, அளவை
,, of dispersion	—	சிதறல் அளவை
,, of skewness	—	கோட்ட அளவை
Median	—	மையக்கோடு, இடைநிலை அளவு, மத்திய அளவு
Median class	—	இடைநிலைப் பிரிவு
Mid value of a class	—	பிரிவின் நடு மதிப்பு
Middle point	—	மையப்புள்ளி, நடுப்புள்ளி
Million	—	பத்து லட்சம்
Minimum	—	மீச்சிறிது, மீச்சிறு அதம, குறைந்தபட்ச, சிறுமம்
Minus	—	குறை, கழி, எதிர்
Moment	—	சுழல் திறன், திருப்பு திறன்
Moment	—	விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
,, First	—	முதற்படி ,, ,,
,, Second	—	இருபடி ,, ,,
,, N th	—	N படி ,, ,,
Multiply	—	பெருக்கு

N

National income	—	நாட்டு வருமானம்
National sample survey	—	தேசிய மாதிரி அளவெடுப்பு
Negative	—	குறை, எதிர்
,, number	—	குறையெண்
Net income	—	நிகர வருமானம்
Nonsense correlation	—	பொருளில்லா ஒட்டுறவு
Normal distribution	—	இயல்நிலைப் பரவல்
,, population	—	நிலையான முழுமைத் தொகுதி
Notation	—	குறியீடு, குறியீட்டு முறை
Number	—	எண்
,, natural	—	இயற்கை எண்
,, positive	—	கூட்டெண், மிகையெண்
Numerically	—	எண்ணளவில்

O

Object — பொருள்
Observation — கண்டறிதல்
Observed data — கண்டறிந்த விவரங்கள்
Ogive — ஓகைவ், வளர் நிகழ்வரை
,, less than — கீழின ஓகைவ், கீழின வளர் நிகழ்வரை
,, greater than — மேலின ஓகைவ், மேலின வளர் நிகழ்வரை
Opposite — எதிரான
Origin — ஆதி

P

Pair — சோடி (ஜோடி), ஜதை
Parallel — ஒருபோகு, சமாந்தர, இணை
Part — பகுதி
Particular — குறிப்பிட்ட
Percent — சதவீதம், நூற்று வீதம்
Percentage error — சதவீதப் பிழை
Percentage bar diagram — சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படம்
Period — காலம், கால வட்டம்
Permutation — வரிசை மாற்றம்
Pie diagram — வட்ட விளக்கப் படம்
Pictogram — உருவ விளக்கப் படம்
Point, turning — திரும்பற் புள்ளி
Point of inflexion — வளைவு மாறு புள்ளி
Population — இனம், இனத் தொகுதி
,, finite — வரம்புடை இனத் தொகுதி
,, infinite — எண்ணற்ற இனத் தொகுதி
Positive — நேர், மிகை
Postal method — அஞ்சல் முறை
Posterior probability — பின் நிகழ் தகவு
Primary — முதல்
,, data — முதனிலை விவரங்கள்

Prior probability — முன் நிகழ்தகவு
Probability — நிகழ்தகவு
Problem — உத்திக் கணக்கு
Procedure — செயன்முறை, செய்முறை, நடைமுறை
Product — பெருக்கம்
,, moment — விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
Proof — நிறுவல்
Property — தன்மை, பண்பு

Q

Qualitative data — பண்பின் விவரங்கள்
Quality control — தரக் கட்டுப்பாடு
Quantitative data — அளவின விவரங்கள்
Quartile — கால்மம்
Questionnaire — வினாத் தொகுதி, கேள்விப் பட்டியல்
Quotient — ஈவு

R

Random sample — சரிசம வாய்ப்புக் கூறு
Range — வீச்செல்லை, இடைவெளி, எட்டுந் தொலைவு
Rank correlation — வரிசைத் தொடர்பு, தரத் தொடர்பு
Ratio — விகிதம்
Raw data — சீர்படா விவரங்கள்
Real — மெய்யான
Reasoning — ஆய்வு
Regression — பின்னடைவு, மாறிகளின் தொடர்பு
Regular polygon — ஒழுங்குப் பலகோணம்
Residues — எச்சம்
Root — மூலம்
,, square — வர்க்க மூலம், இருபடி மூலம்
Roots, coincident — பொருந்து மூலகங்கள்

S

Sample, stratified random — படுகை சம வாய்ப்புக் கூறு
Sample — கூறு
,, large — பெருங் கூறு
,, small — சிறு கூறு
Sampling distribution — கூறு பரவல்
,, methods — கூறெடுத்தல் முறைகள்
,, random — சம வாய்ப்புக் கூறெடுத்தல்
Scale — அளவுத் திட்டம், அளவு கோல், தராசு
Scatter — அசம பக்க முக்கோணம்
,, diagram — சிதறல் விளக்கப் படம்
Secondary — துணையான
Series — தொடர்
,, binomial — ஈருறுப்புத் தொடர்
,, infinite — முடிவில்லாத் தொடர்
Significance — முக்கியத்துவம்
,, test of — முக்கியத்துவச் சோதனை
Skewness — சீரின்மை, கோட்டம்
,, coefficient of — கோட்டக் கெழு
,, measure of — கோட்ட அளவை
Solution — தீர்வு
Solve — தீர்த்தல்
Standard deviation — திட்ட விலக்கம், தரமான விலக்கம்
Statistic — புள்ளியியல் அளவை
Statistical investigator — புள்ளி விவர ஆய்வாளர்
,, methods — புள்ளியியல் முறைகள்
,, quality control — புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு
Subtrahend — கழிக்கப்படுமெண்
Sum — தொகை, கூட்டுத் தொகை, கூட்டுப்பலன், கணக்கு
Survey — நிலவளவை, அளவெடுப்பு
Symmetry — சமச்சீர்

T

Table — வாய்பாடு, அட்டவணை

Tabulation — பட்டியலமைத்தல்
Tally mark — கணிப்புக் குறி
Test — சோதனை
Theorem — தேற்றம்
Theory — கொள்கை, அறிமுறை
Total — மொத்தம்

U

Units — அலகுகள்
Unsymmetrical — சமச்சீரில்லாத, சீரின்மை

V

Value — மதிப்பு, பெறுமானம்
Variable — மாறி
Variance — மாறுபாடு, விலக்க வர்க்கச் சராசரி, பரவற்படி
Variate — மாறி
,, continuous — தொடர் மாறி
,, discrete — தனித்த மாறி
Variation — மாறல், மாறுபாடு
Verification — சரிபார்த்தல்

W

Whole sale index number — முழு விற்பனைக் குறியீட்டெண்
Width of a class interval — பிரிவுத் தூரம்

X

X-axis — X-அச்சு (கிடை அச்சு)

Y

Y-axis — Y-அச்சு (நிலை அச்சு)
Year — ஆண்டு, வருடம்